доцент Виноглядов В.Н.

Лабораторная работа № 1-3: Маятник Максвелла

студент____ группа:______________

Допуск____Выполнение_________________________Защита______________

Цель работы: познакомиться с основными понятиями кинематики и динамики поступательного и вращательного движения. Экспериментально определить угловое ускорение и момент инерции маятника.
Приборы и принадлежности: маятник Максвелла, набор металлических накладных колец, втулки.

Описание экспериментальной установки.

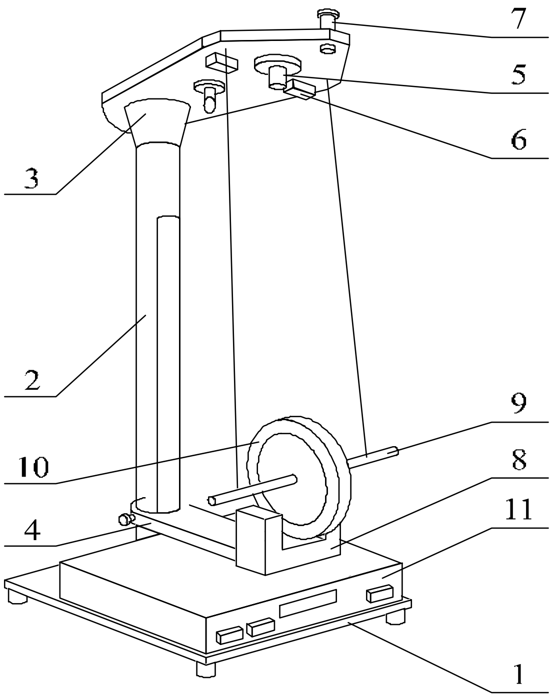


рис. 1

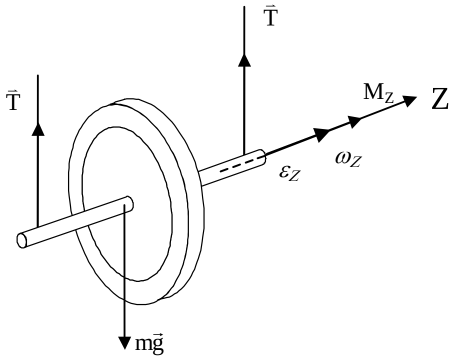


рис. 2

Данная установка называется **маятником Максвелла**. Она служит для определения момента инерции тела. Небольшой диск (маховичок), туго надетый на ось опускается под действием силы тяжести на двух нитях, предварительно намотанных на ось маховичка. Нити во время движения разматываются до полной длины. Раскрутившийся маховичок по инерции продолжает вращательное движение в том же направлении и наматывает нити на ось, вследствие чего он поднимается вверх, замедляя при этом вращение. Дойдя до верхней точки, диск опять опускается вниз и т.д. Маховичок будет совершать колебания вверх - вниз, поэтому данное устройство и называют маятником.

Общий вид маятника Максвелла приведён на рис. 1.

На основании 1 закреплена стойка 2, к которой прикреплены неподвижный верхний кронштейн 3 и подвижный кронштейн 4. На верхнем кронштейне находится электромагнит 5, фотоэлектрический датчик №1 6 и вороток с фиксатором 7 для закрепления и регулировки длины маятника.

Нижний кронштейн 4 с фотодатчиком № 2 8 можно перемещать вдоль стойки и фиксировать в выбранном положении. Маятник 9 — это диск, закрепленный на оси и подвешенный на двух нитях к неподвижному кронштейну. На диск накладываются сменные металлические кольца 10, изменяющие момент инерции системы. Маятник с наложенным кольцом удерживается в верхнем положении электромагнитом. Длина маятника определяется по миллиметровой шкале стойки прибора. Сигналы с фотодатчиков служат для автоматического пуска и остановки миллисекундомера 11.

Выполнение работы

Уравнения для поступательного и вращательного движения маятника без учёта сил сопротивления воздуха в нашем случае имеют вид:

$$\begin{cases} ma = mg - 2T & (1) \\ M = I\varepsilon & (2) \\ a = \varepsilon r & (3) \end{cases}$$

где m — полная масса маятника, кг, I - момент инерции маятника, кг · м^2, g — ускорение свободного падения, м/с^2, r - радиус оси маятника, м, T - сила натяжения нити (одной), Н, a - ускорение поступательного движения центра масс маятника, м/с^2, ε - угловое ускорение маятника, рад/с^2.

Так как уравнение вращательного движения маховичка относительно оси вращения: $M = I\varepsilon$, где $M = 2Tr$ — результирующий момент действующих на маятник сил относительно оси вращения, то с учетом уравнения (1), момент действующих сил можно определить по формуле:

$$M = mr(g - a).$$

Упражнение 1. Определение углового ускорения маятника и его дисперсии

1. Установите при помощи подвижного кронштейна высоту падения маятника h, заданную преподавателем. При помощи воротка с фиксатором 7 отрегулируйте длину нитей маятника Максвелла. Следите за тем, чтобы ось маятника была расположена горизонтально.
2. На диск маятника наложите стальное кольцо и запишите его массу $m_к$. Убедитесь, что край стального кольца находится примерно на 2 мм ниже оптической оси нижнего фотоэлектрического датчика. Если нет, отрегулируйте высоту нижнего кронштейна с фотоэлектрическим датчиком. Замерьте радиус оси маятника r.
3. Включите кнопку «СЕТЬ».
4. Нажмите кнопку «СБРОС» чтобы убедиться, что на табло установились нули.
5. Аккуратно вращая диск маятника, намотайте на его ось нить и зафиксируйте его в верхнем положении при помощи электромагнитов. При этом следите за тем, чтобы нити наматывались на ось виток к витку.
6. Нажмите кнопку «ПУСК» на передней панели миллисекундомера, удерживая её в течение одной секунды. При этом маятник начнёт двигаться вниз, а таймер производить отсчет времени. В момент пересечения маятником оптической оси фотодатчика отсчет времени должен прекратиться.
7. Прочитайте измеренное значение времени падения маятника и занести его в таблицу 1.
8. Нажмите кнопку «СБРОС» и приведите маятник в исходное положение (то есть зафиксируйте его в верхнем положении при помощи электромагнита).
9. Аналогично проведите ещё четыре замера времени падения маятника с заданной высоты. Результаты занесите в таблицу 1.

h = *m*$_к$ = *r* = ***Таблица 1***

$N_{опыта}$	1	2	3	4	5	$\sum$
t_i						
ε_i						
$(\varepsilon_i - <\varepsilon>)^2$						

10. Угловое ускорение маятника ε рассчитайте по формуле:

$$\varepsilon_i = \frac{a_i}{r} = \frac{2h}{t_i^2\, r},$$ где r - радиус оси маятника.

11. Вычислите среднее значение углового ускорения, его дисперсию и среднеквадратичное отклонение по формулам:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i}{n}; \qquad S_{\langle\varepsilon\rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_i - \langle\varepsilon\rangle\right)^2}{n(n-1)}},$$ где n - число опытов.

12. Окончательный ответ запишите в виде: $\varepsilon = <\varepsilon> \pm t_{pk}\cdot S_{<\varepsilon>}$, где $t_{pk} = 2.8$ для $p = 0,95$ и $k = 4$.

Упражнение 2. Проверка уравнения вращательного движения и определение момента инерции маятника

Цель упражнения 2 состоит в проверке основного уравнение вращательного движения маятника $M_z = I_z\varepsilon$. Используя критерий Фишера, необходимо убедиться в линейной зависимости между угловым ускорением маятника ε и моментом внешних сил M_z, действующих на него.

Момент инерции маятника I_z относительно оси вращения определим методом наименьших квадратов для линейной зависимости $y = Ax$ по методике обработки совместных измерений (см. лабораторную работу № 0 – 1).
Для этого момент внешних сил M_z и угловое ускорение маятника ε рассчитайте по формулам:

$$M_{zi} = mr_i(g - a_i), \qquad \varepsilon_i = \frac{a_i}{r_i},$$

где m – полная масса маятника и $a_i = \dfrac{2h}{t_i^2}$.

Искомый момент инерции маятника I_z определим методом наименьших квадратов

Выполнение упражнения

1. Оденьте на ось маятника подвижные втулки и, изменяя с помощью них радиус оси r_i, проведите 5 замеров времени падения маятника t_i. Результаты занесите в таблицу 2.

Таблица 2

№	r	t_i	h	a_i	M_{zi}	ε_i	$M_{zi}\cdot\varepsilon_i$	ε_i^2	$\left(M_{zi} - I\cdot\varepsilon_i\right)^2$
1									
2									
3									
4									
5									
Σ									

2. Для проверки линейной зависимости $M_z = I_z\varepsilon$ определите момент инерции маятника I_z и его дисперсию S_I^2 по формулам:

$$I_z = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{zi}\cdot\varepsilon_i}{\sum_{i=1}^{5}\varepsilon_i^2}; \qquad S_I^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(M_{zi} - I\cdot\varepsilon_i\right)^2}{n-1},$$

где $n = 5$ – число измерений.

3. Постройте график зависимости $M_z = f(\varepsilon)$, используя свои экспериментальные данные, а так же прямую $M_z = I_z\varepsilon$, где I_z - вычисленный момент инерции маятника и убедитесь, что экспериментальные точки лежат вблизи прямой.

4. Вычислите критерий Фишера по следующей формуле: $F = \dfrac{S_{ад}^2}{S_{оп}^2}$, где дисперсию адекватности и дисперсию опыта рассчитайте по формулам:

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(M_{zi} - I\cdot\varepsilon_i\right)^2}{n-1} \quad \text{и} \quad S_{оп}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(M_{zi} - \langle M_{zi}\rangle\right)^2}{n-1}, \quad \text{где } \langle M_{zi}\rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_{zi}^{\ 2}}{n},$$

где $n = 5$ – число измерений

5. Проверьте равенство $F \le F_{табл} = 6.59$. Если это равенство выполняется, то с вероятностью 0,95 можно утверждать, что предположение о линейной зависимости между угловым ускорением маятника ε и моментом внешних сил M_z, действующим на него, является справедливым.

6. Сделайте вывод о справедливости основного уравнения вращательного движения твёрдого тела $M_z = I_z\varepsilon$.

7. Запишите окончательный ответ момента инерции маятника в виде: $I = I_z \pm S_I$

Упражнение 3. Изучение зависимости момента инерции маятника от его массы и определение моментов инерции колец I_k и диска держателя I_d

Для определения искомых величин проведём совместные измерения. Возможность определения моментов инерции колец I_k и диска держателя I_d основана на свойстве аддитивности момента инерции механической системы (т.е. момент инерции системы равен сумме моментов инерции его частей).

Для нашего случая можно записать: $I = I_k + I_d$,
или, введя обозначения $I_k = Am_i$ и $I_d = B$ получим: $I = Am_i + B$,
где m_i - это масса i – го кольца, а параметры A и B определяются, используя метод наименьших квадратов для линейной зависимости $y = Ax + B$ по формулам:

$$A = \frac{n\sum_{i=1}^{n} m_i I_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{i=1}^{n} I_i}{n\sum_{i=1}^{n} m_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} m_i)^2}; \qquad B = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i^2 \sum_{i=1}^{n} I_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{i=1}^{n} m_i I_i}{n\sum_{i=1}^{n} m_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} m_i)^2}. \qquad (4)$$

В этих формулах m_i - это масса i – го кольца, а I_i - это момент инерции всего маятника (т.е. кольца и диска держателя с осью вместе), который вычисляется по формуле: $I_i = \dfrac{M_i}{\varepsilon_i} = \dfrac{m r (g - a_i)}{\varepsilon_i} = \dfrac{m t_i^2 r^2}{2h}\left(g - \dfrac{2h}{t_i^2}\right)$, (5)

где m – полная масса маятника (диска держателя, оси маятника и i - го кольца).

1. Снимите с оси маятника подвижные втулки и, одевая на диск держатель кольца разной массы m_i, проведите пять замеров времени падения маятника с одной и той же высоты h. Результаты занесите в таблицу 3.

h =

Таблица 3

№	m_i	t_i	I_i	$m_i I_i$	m_i^2	$I_i - Am_i - B$	$\left(I_i - Am_i - B\right)^2$
1							
2							
3							
4							
5							
Σ							

2. По формулам (4) и (5) рассчитайте I_i, а также параметры A и B, и до конца заполните таблицу 3.

3. Рассчитайте дисперсию адекватности по формуле:

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(I_i - Am_i - B\right)^2}{n-2},$$ где n - число опытов.

4. Дисперсию опыта рассчитайте по результатам первого упражнения по формуле:

$$S_{оп}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(I_i - \langle I \rangle\right)^2}{n-1},$$

где $I_i = \dfrac{M_i}{\varepsilon_i} = \dfrac{m r (g - a_i)}{\varepsilon_i} = \dfrac{m t_i^2 r^2}{2h}\left(g - \dfrac{2h}{t_i^2}\right)$ и $\langle I \rangle = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} I_i}{n}$, n - число опытов.

m – масса маятника (кольца $m_к$, диска держателя и оси маятника) из упражнения 1.

4. проверьте справедливость предположения о линейной модели нашей зависимости $I = Am_i + B$

по критерию Фишера: $F_{рас} = \dfrac{S^2_{ад}}{S^2_{оп}}$.

Если $F_{рас} \le F_{таб} = 6.94$, то с вероятностью 95% можно утверждать, что гипотеза о справедливости линейной зависимости $I = Am_i + B$ не отвергается.

5. Постройте график зависимости $I = Am + B$ и, отложив на нем экспериментальные точки, убедитесь, что они лежат вблизи прямой.

6. Запишите моменты инерции каждого кольца I_k и диска держателя I_d.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

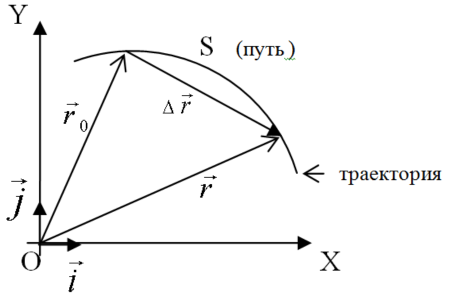
1. Поступательное и вращательное движение (определения и их основные характеристики: путь, перемещение, линейная и угловая скорости, линейное и угловое ускорения).
2. Уравнения поступательного и вращательного движения.
3. Связь линейных (S, v, a_τ, a_n) и угловых($\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon}$) величин.
5. Понятие о моменте силы и моменте инерции абсолютно твёрдого тела. Собственные моменты инерции различных тел. Теорема Штейнера.
6. Основное уравнение динамики поступательного движения.
7. Основное уравнение динамики вращательного движения.
8. Кинетическая энергия тела при поступательном и вращательном движении. Теорема Кёнига

Основные теоретические сведения

Механика – раздел физики, изучающий механическое движение и взаимодействие материальных тел.

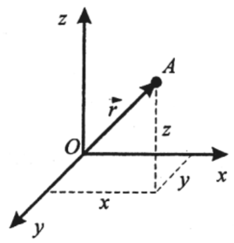
Основные разделы механики:

- **кинематика** (изучает движение тел без учёта сил, вызывающих эти движения),
- **динамика** (изучает закономерности движения тел, обусловленные действующими на них силами),
- **статика** (изучает законы равновесия тел).



Материальная точка - это тело, размерами и формой которого в условиях данной задачи можно пренебречь.
Механическим движением – называется перемещение тела в пространстве относительно других тел с течением времени.
Для описания движения материальной точки необходима система отчета.
Системой отсчета называется совокупность тела отсчета, системы координат и часов для измерения времени.
Траектория – это линия, по которой движется материальная точка.
Путь S – это длина траектории, по которой двигалась материальная точка.

Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором $\vec{r}$ **.**
Радиус – вектор $\vec{r}$ – это вектор, проведённый из начала координат в рассматриваемую материальную точку.



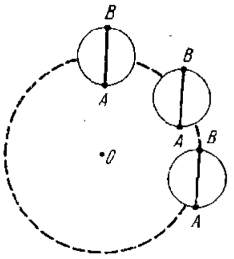
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,,\ [м],\ \text{метр.}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы осей координат (орты);
x, y, z — координаты точки.

Модуль радиус – вектора равен : $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Перемещение $\Delta\vec{r}$ – это вектор, направленный из начального положения материальной точки в её конечное положение: $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, где $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ - это начальный и конечный радиус – вектор материальной точки.
$[\vec{r}] = [м]$, метр

Кинематика поступательного движения



Поступательным называется движение, при котором любая прямая, проведённая в теле, остаётся параллельной сама себе при движении тела.

Основными особенностями поступательного движения являются следующие обстоятельства:

- *при поступательном движении все точки тела движутся совершенно одинаково, то есть имеют одну и ту же скорость, ускорение, траектории движения, совершают одинаковые перемещения и проходят одинаковый путь.*
- *в этом случае при описании движения тела его можно рассматривать как материальную точку.*

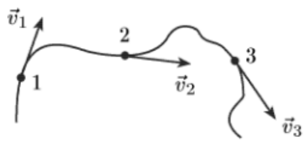
Для описания поступательного движения тел вводят в рассмотрение следующие понятия:
Для характеристики быстроты перемещения тела в пространстве вводят понятие ***мгновенной скорости*** $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},\quad \text{размерность скорости: } [v] = \frac{м}{с},\ \text{метр в секунду.}$$

Мгновенная скорость $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$, $\left[\frac{м}{с}\right]$, где $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$ - проекции скорости $\vec{v}$ на оси координат.

Модуль скорости тела равен: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

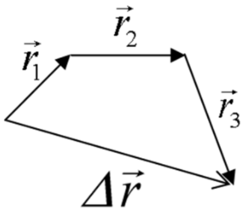
Таким образом, ***мгновенной скоростью*** называется векторная величина, равная первой производной радиус-вектора материальной точки по времени.
Физический смысл скорости: *она показывает, какое перемещение совершает тело за единицу времени при равномерном движении.*



(пример: $v = 5\frac{м}{с}$ означает, что тело за каждую секунду перемещается на 5 м.)
Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории движения материальной точки.

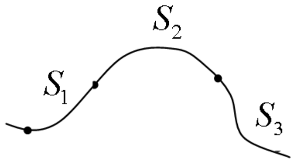
Кроме мгновенной скорости существует ещё средняя скорость.
Следует различать: - среднюю скорость по перемещению (или среднюю скорость) $\langle\vec{v}\rangle$ (величина векторная),
- среднюю путевую скорость $\langle v\rangle$ (величина скалярная).

Средней скоростью по перемещению $\langle\vec{v}\rangle$ (вэ) называется векторная величина, равная отношению перемещения тела $\Delta\vec{r}$ (дельта эр) за какой-либо промежуток времени Δt (дэльта тэ), к величине этого промежутка времени:



$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2+\ldots+\vec{r}_n}{t_1+t_2+\ldots t_n}$$

Средней путевой скоростью $\langle v \rangle$ (вэ) называется скалярная величина, равная отношению пути S пройденного телом за какой- либо промежуток времени t, к величине этого промежутка времени:



$$\langle v \rangle = \frac{S}{t} = \frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{t_1+t_2+\ldots+t_n}$$

Особый случай: Если тело за рассматриваемый промежуток времени движется в одном и том же направлении с одним и тем же по величине и направлению ускорением (то есть $\vec{a}=const$), то среднюю скорость тела за этот промежуток времени можно определить по формуле: $\langle v \rangle = \dfrac{v_1+v_2}{2}$, где v_1 и v_2 - это начальная и конечная скорости тела на этом участке. материальной точки.

Ускорение $\vec{a}$

Для характеристики быстроты изменения скорости по величине и направлению вводят понятие ускорения $\vec{a}$:
Различают среднее и мгновенное ускорения.

Средним ускорением называется векторная величина, равная отношению изменения скорости тела $\Delta\vec{v}$ за какой-либо промежуток времени Δt, к величине этого промежутка времени:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t_2-t_1},$$

где $\Delta\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$ - изменение скорости тела за время Δt,

$\Delta t = t_2 - t_1$ -промежуток времени, за который изменилась скорость тела,

v_2 - скорость тела в момент времени t_2; v_1 - скорость тела в момент времени t_1.

Мгновенным ускорением называется векторная величина, равная первой производной вектора мгновенной скорости тела по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

где $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}, a_y = \dfrac{dv_y}{dt}, a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$ - проекции вектора мгновенного ускорения на оси координат.

Величина вектора мгновенного ускорения равна: $a = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$;

$[a] = \dfrac{м}{с^2}$, метр на секунду в квадрате.

Физический смысл ускорения $\vec{a}$: *оно показывает, на сколько метров в секунду изменяется скорость тела за одну секунду при равнопеременном движении.*

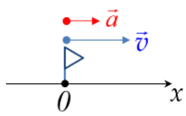
(например: $a = 10\dfrac{м}{с^2}$ означает, что скорость тела изменяется на $10\dfrac{м}{с}$ за каждую секунду.)

По виду траектории различают ***прямолинейное*** и ***криволинейное*** движение материальной точки.

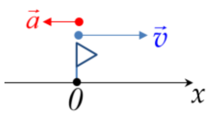
Прямолинейное движение материальной точки

При прямолинейном движении тела ускорение $\vec{a}$:

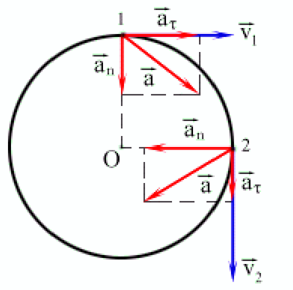
- сонаправлено с вектором мгновенной скорости тела $\vec{v}$ в случае ускоренного движения, (то есть скорость с течением времени увеличивается)



- противоположно направлено вектору мгновенной скорости тела $\vec{v}$ при замедленном движении. (то есть скорость с течением времени уменьшается)



Криволинейное движение материальной точки

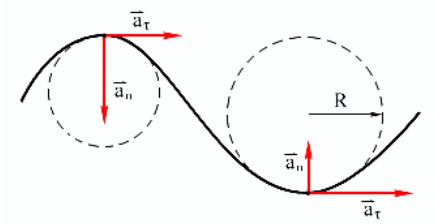


При криволинейном движении вектор ускорения $\vec{a}$ в общем случае образует с вектором мгновенной скорости $\vec{v}$ некоторый угол α.

В этом случае вектор полного ускорения удобно разложить на две составляющие a_τ и a_n,

где $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$ - тангенциальное (или касательное) ускорение (характеризует быстроту изменения вектора скорости по величине),

$a_n = \dfrac{v^2}{r}$ - нормальное (или центростремительное) ускорение (характеризует быстроту изменения вектора скорости по направлению)

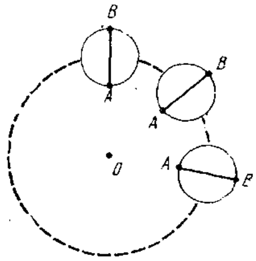


Из рис. следует, что полное ускорение материальной точки при криволинейном движении $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$

Модуль полного ускорение материальной точки при криволинейном движении

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

Кинематика вращательного движения



Вращательным называется движение, при котором все точки тела описываю окружности, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой ***осью вращения тела***.

Основной особенностью вращательного движения является следующее обстоятельство: *при вращательном движении все точки тела движутся с одной и той же угловой скоростью и угловым ускорением и совершают одинаковые угловые перемещения.*

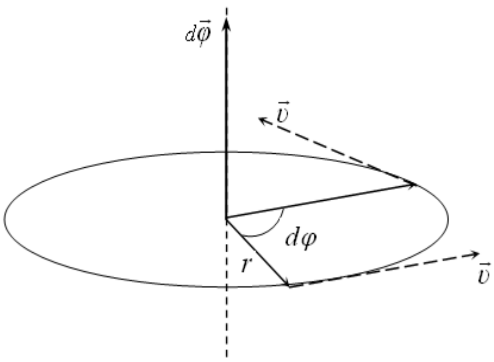


рис. 3

Для описания вращательного движения тела вводят в рассмотрение следующие понятия:

Угол поворота φ (фи)- это угол, на который поворачивается радиус-вектор любой точки тела при его вращении.

$$[\varphi] = рад \text{, радиан.}$$

Элементарное угловое перемещение $d\varphi$ можно рассматривать как вектор $d\vec{\varphi}$, направление которого определяется по **правилу буравчика** (правилу правого винта):

Если буравчик установить вдоль оси вращения тела и вращать рукоятку буравчика по направлению вращения тела, то поступательное движение буравчика укажет направление вектора $d\vec{\varphi}$ (см. рис. 3).

Удобство такого введения в следующем:

- модуль вектора $d\vec{\varphi}$ однозначно определяет величину элементарного поворота тела $d\varphi$,
- направление вектора $d\vec{\varphi}$ через правило буравчика определяет направление вращения тела,
- положение вектора $d\vec{\varphi}$ в пространстве определяет ось вращения тела.

Для характеристики быстроты вращения тела в пространстве вводится понятие ***мгновенной угловой скорости*** $\vec{\omega}$ (омега).

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad \text{размерность } [\omega] = \frac{рад}{с}, \text{ радиан в секунду.}$$

Таким образом, ***мгновенная угловая скорость*** $\vec{\omega}$ есть первая производная по времени от угла поворота.

Физический смысл угловой скорости: *она показывает, на какой угол поворачивается радиус-вектор любой точки тела за единицу времени при равномерном вращении.*

(например: $\omega = 2\dfrac{рад}{с}$ означает, что за каждую секунду радиус-вектор поворачивается на 2 радиана)

Направление угловой скорости $\vec{\omega}$ совпадает с направлением вектора $d\vec{\varphi}$, то есть направление $\vec{\omega}$ также определяется по правилу буравчика.

Для характеристики быстроты изменения угловой скорости вводится понятие ***мгновенного углового ускорения*** $\vec{\varepsilon}$ (эпсилон):

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad \text{размерность } [\varepsilon] = \frac{рад}{с^2}, \text{ радиан на секунду в квадрате.}$$

Таким образом, ***мгновенное угловое ускорение*** $\vec{\varepsilon}$ есть первая производная по времени от угловой скорости тела.
Физический смысл углового ускорения: *оно показывает, на сколько изменяется угловая скорость тела за единицу времени при равнопеременном вращении.*

(например: $\varepsilon = 1\frac{рад}{c^2}$ означает, что за каждую секунду угловая скорость тела изменяется на $1\frac{рад}{c}$.)

Направление вектора углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора $d\vec{\omega}$, то есть оно сонаправлено с вектором $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении тела и противоположно направлено при замедленном вращении.
Период вращения *T* (тэ)– это время одного полного оборота.

$T = \frac{t}{N}$, где t – время, за которое точка сделает N оборотов. $[T] = c$

Частота вращения n (эн)– это число оборотов за единицу времени.

$n = \frac{N}{t}$, где N – число оборотов за время t. $[n] = \frac{об}{c} \equiv \frac{1}{c}$

Причём
$$T = \frac{1}{n}$$

Равномерное движение материальной точки по окружности – это движение с ускорением, которое называется нормальным или центростремительным $a_{ц\,с.}$ (оно характеризует быстроту поворота вектора скорости по направлению и направлено к центру окружности, по которой движется точка).

Связь линейных и угловых величин

$$\begin{cases} S = \varphi r \\ v = \omega r \\ a_{цс} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega v \end{cases} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \qquad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \qquad T = \frac{1}{n}$$

Уравнения поступательного и вращательного движения

Уравнениями движения называются уравнения, по которым можно определить координаты тела или радиус-вектор тела в любой момент времени: $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Зная уравнения движения, можно определить мгновенную скорость и ускорение тела в любой момент времени

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

либо решить обратную задачу: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)dt$ или $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)dt$

Уравнения равнопеременного поступательного движения

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \quad \text{и} \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

или в скалярном виде

$$\begin{cases} x = \pm x_0 \pm v_{ox} t \pm \frac{a_x t^2}{2} \\ y = \pm y_0 \pm v_{oy} t \pm \frac{a_y t^2}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} v_x = \pm v_{0x} \pm a_x t \\ v_y = \pm v_{oy} \pm a_y t \end{cases}$$

Уравнения равнопеременного вращательного движения

$$\varphi = \pm\varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad \text{и} \quad \omega = \pm\omega_0 \pm \varepsilon t$$

В общем случае уравнения вращательного движения

$$\varphi(t) = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t)dt \quad \text{и} \quad \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon(t)dt$$

Основы динамики поступательного и вращательного движения тела.

Для описания взаимодействия одного тела на другое вводят понятие силы $\vec{F}$.

Сила – векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело других тел или полей и характеризующая величину и направление этого воздействия.

Под действием силы тело может:

- деформироваться (статическое проявление силы),
- приобретать ускорение (динамическое проявление силы).

Основным уравнением динамики поступательного движения тела является **второй закон Ньютона**.

Одной из формулировок этого закона является следующая:

В инерциальной системе отсчёта векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна произведению массы этого тела на сообщённое ему ускорение: $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$,

где F - сила, $[F] = \frac{кг \cdot м}{с^2} = Н$, Ньютон, m - масса тела, $[m] = кг$, килограмм, a - ускорение тела, $[a] = \frac{м}{с^2}$.

Масса тела m является одной из важнейших понятий динамики, характеризующая инертные и гравитационные свойства тела. Масса тела – величина аддитивная (то есть масса тела равна сумме масс всех его частей).

Опыт показывает, что при описании вращательного движения твёрдого тела, кроме величины и направления действующей на тело силы, важной характеристикой является ещё и точка приложения этой силы.

В связи с этим вводят в рассмотрение понятие момента силы $\vec{M}$.

Моментом силы $\vec{M}$ относительно неподвижной точки О называется векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки О в точку приложения силы $\vec{F}$, на саму эту силу: $\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]$, где $[M] = Н \cdot м$, Ньютон · метр.

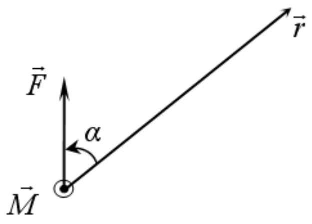


рис. 4

Вектор момента силы $\vec{M}$ является аксиальным, то есть его направление определяется ***по правилу векторного произведения (или правилу буравчика):***

если рукоятку буравчика вращать от первого сомножителя в векторном произведении $\vec{r}$ ко второму $\vec{F}$ по кратчайшему повороту, то поступательное движение буравчика укажет направление вектора $\vec{M}$ (см. рис. 4)

Следует помнить, что перед применением этого правила необходимо совместить начала перемножаемых векторов в точке О.

Можно использовать более простое ***правило буравчика***:

если рукоятку буравчика вращать по направлению действия силы $\vec{F}$, то поступательное движение буравчика будет совпадать с направлением вектора момента силы $\vec{M}$ (см. рис. 5).

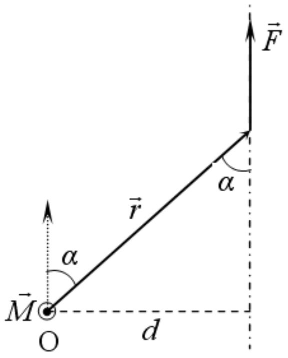


рис. 5

На рис. 4 и 5 вектор $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа на нас.

При этом следует помнить, что начало вектора $\vec{M}$ совпадает с точкой О,

сам вектор перпендикулярен одновременно векторам $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а его величину можно определить по формуле: $M = rF\sin\alpha$ или $M = Fd$,

где α - угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а величина $d = r\sin\alpha$ называется плечом силы $\vec{F}$, $[d] = м$, метр.

Плечом силы d называется кратчайшее расстояние от точки О до линии действия силы $\vec{F}$ (см. рис. 5).

Величина $\vec{M}$ зависит от выбора точки О.

Моментом силы M_Z относительно неподвижной оси Z называется скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента силы $\vec{M}$ относительно любой точки О, выбранной на этой оси: $M_Z = [\vec{r}\vec{F}]_Z = Fd$,

где d - плечом силы $\vec{F}$. Величина M_Z не зависит от выбора точки О на этой оси Z.

Наблюдения показывают, что при рассмотрении вращательного движения тела, основной характеристикой инертных свойств тела является не масса этого тела m, а величина, которая называется ***моментом инерции тела*** I.

Различают момент инерции тела относительно точки и момент инерции тела относительно оси.

Моментом инерции тела относительно оси Z называется величина равная $I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$, (1)

где r_i - кратчайшее расстояние от оси Z до элементарной массы тела m_i.

Для реального твёрдого тела момент инерции относительно неподвижной оси находится при стремлении $n \to \infty$, то есть

$$I_Z = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV,$$

где $[I] = кг \cdot м^2$, ρ - это функция зависимости плотности тела от координат, а сам интеграл определяется по всему объёму данного тела.

Однако на практике моменты инерции тел обычно определяют опытным путём, в связи с тем, что математически определить момент инерции тела бывает очень сложно.

Из анализа уравнения (1) следует, что величина I_z зависит не только от массы тела, но и от её распределения относительно оси вращения, поэтому в общем случае любое тело имеет бесконечное множество различных моментов инерции (в отличие от массы тела *m*, которая является величиной постоянной). Возникает вопрос: *существует ли такая же величина или несколько величин, которые подобно массе тела при поступательном движении, однозначно определяли бы инертные свойства тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?* Оказывается существуют. Это, так называемые, ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ тела. Разберемся, что это такое.

Через центр инерции (центр масс) любого тела можно провести бесконечное множество осей вращения (оси, проходящие через центр инерции тела называются **собственными**, а моменты инерции тела относительно этих осей – **собственными моментами инерции**). Однако из всех этих осей для тела произвольной формы всегда можно выбрать ось, относительно которой собственный момент инерции будет МАКСИМАЛЬНЫМ, и ось, относительно которой собственный момент инерции будет МИНИМАЛЬНЫМ, причем две эти оси всегда оказываются взаимно перпендикулярными. Кроме того, только относительно этих двух осей возможно устойчивое вращение тела даже без закрепления этих осей, поэтому их еще называют **свободными осями инерции тела**.

Эти две свободные оси инерции, а также перпендикулярная им третья ось, пересекающиеся в центре инерции тела называются **главными осями инерции**, а моменты инерции относительно этих осей **главными моментами инерции тела.** *Для симметричных тел одной из главных осей инерции всегда является ось симметрии тела.*

Момент инерции тела относительно любой произвольной оси, непроходящей через центр масс тела можно определить по **теореме Штейнера :**

Момент инерции тела относительно произвольной оси I *равен сумме момента инерции тела* I_O *относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной данной, и произведения массы тела m на квадрат расстояния между этими осями* d^2:

$$I = I_O + md^2 .$$

Основное уравнение динамики вращательного движения тела относительно неподвижной оси

Основным уравнением динамики вращательного движения тела является закон аналогичный второму закону Ньютона, одной из формулировок которого является следующая:

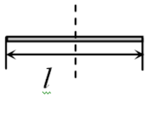
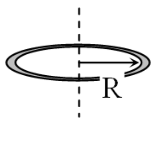
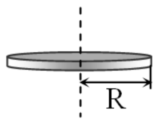
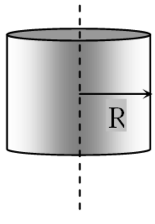
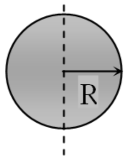
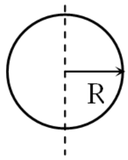
В инерциальной системе отчёта алгебраическая сумма моментов всех внешних сил $\sum M_{Z_i}$ *, действующих на тело относительно неподвижной оси Z, равна произведению момента инерции этого тела относительно этой оси* I_Z *, на сообщённое ему угловое ускорение* ε *:*

$$\sum M_{Z_i} = I_Z \varepsilon .$$

Зная инертные свойства тела, можно рассчитать и другие характеристики этого тела при его вращении. Такие, например, как величину результирующего момента сил, действующих на тело M_Z, величину момента импульса L_z и кинетическую энергию тела T_z относительно любой неподвижной оси вращения *Z*: $M_Z = I_Z \varepsilon$; $L_z = I_z \omega$; $T_z = \dfrac{I_z \omega^2}{2}$,

где I_Z – момент инерции тела относительно оси Z; ε - угловое ускорение тела относительно оси Z,
ω - угловая скорость тела относительно этой оси.

В качестве примера ниже приведены значения собственных моментов инерции некоторых тел массой *m*.

однородный тонкий стержень длиной *l*	однородный тонкий обруч радиусом R	однородный тонкий диск радиусом R	однородный тонкий диск радиусом R	однородный сплошной цилиндр радиусом R	однородный шар радиусом R	однородная сфера радиусом R
						
$I = \dfrac{ml^2}{12}$	$I = mR^2$	$I = \dfrac{mR^2}{2}$	$I = \dfrac{mR^2}{4}$	$I = \dfrac{mR^2}{2}$	$I = \dfrac{2}{5}mR^2$	$I = \dfrac{2}{3}mR^2$