профессор, к.т.н. Миндолин С.Ф., ст. преподаватель Маслов В.А.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1-2: ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Студент ____ группа________________

Допуск ____ Выполнение _________________________Защита _______________

Цель работы: исследование зависимости величины углового ускорения абсолютно твердого тела от приложенных к нему моментов сил при вращении этого тела вокруг закрепленной оси.

Приборы и принадлежности: прибор для изучения вращательного движения тела.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Экспериментальная установка маятник Обербека представлена на рис. 1.

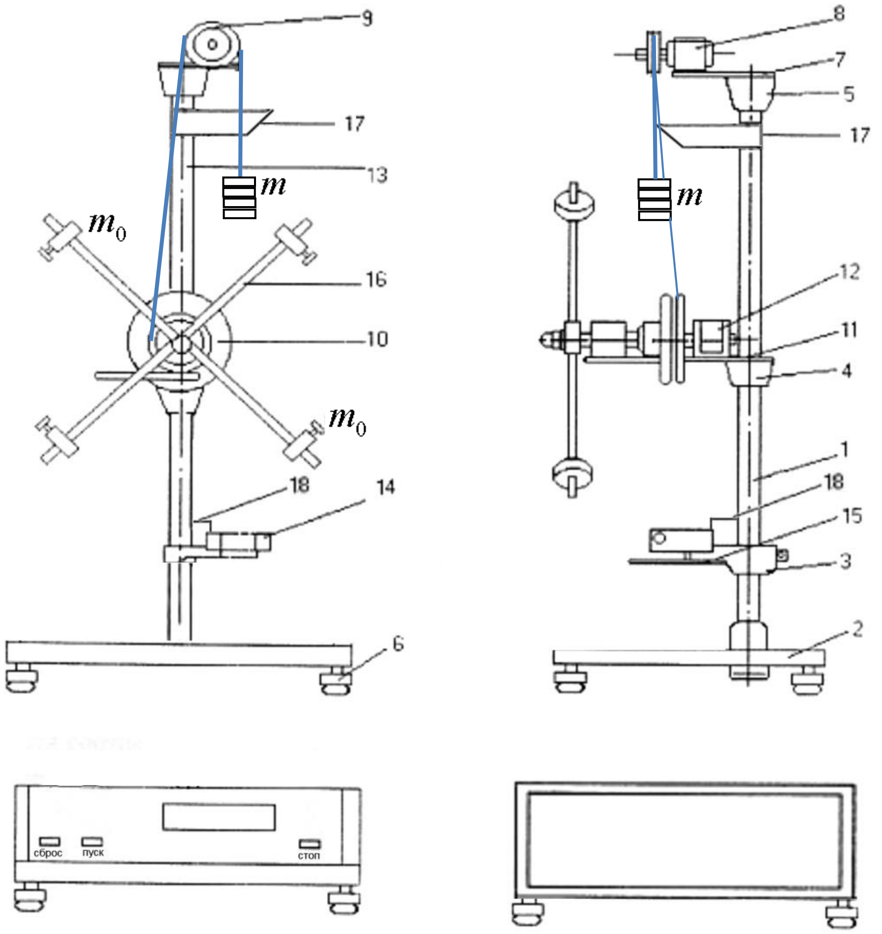


Рис. 1

Основные элементы маятника Обербека:

основание - 2, вертикальная стойка - 1, верхний кронштейн - 17, который можно перемещать вдоль колонны и фиксировать в любом положении, определяя длину пути движения груза, средний кронштейн - 4, на котором размещен узел подшипников 12 с малоинерционным шкивом 10, кронштейн - 18 для размещения фотодатчика 14.

Основание - 2 снабжено регулируемыми опорами и зажимом для фиксации стойки.

3 - нижний кронштейн неподвижный, на котором закреплен фотоэлектрический датчик 14, вырабатывающий электроимпульс конца измерения времени движения груза и включающий тормозной электромагнит 12 и кронштейн 15 с резиновыми амортизаторами, ограничивающими движение грузов,

5 – верхняя втулка, на которой посредством основания закрепляется подшипниковый узел 8 и диск 9 , через который перебрасывается нить. Одним концом нить прикрепляется к двухступенчатому шкиву 10 , а вторым концом ее прикрепляют к грузу массой m .

В данной установке груз движется поступательно, а шкив вместе с прикрепленными к нему телами вращаются. Изобразим все силы, действующие на движущийся груз: $m\vec{g}$ -сила тяжести груза; $\vec{T}_2 -$ сила натяжения нити. Изобразим также силы, действующие на шкив: $\vec{N} -$ сила реакции оси вращения; $m\vec{g}$ - сила тяжести шкива вместе с прикрепленными к нему телами; $\vec{T}_1 -$ сила натяжения нити. Моментом сил трения пренебрегаем.

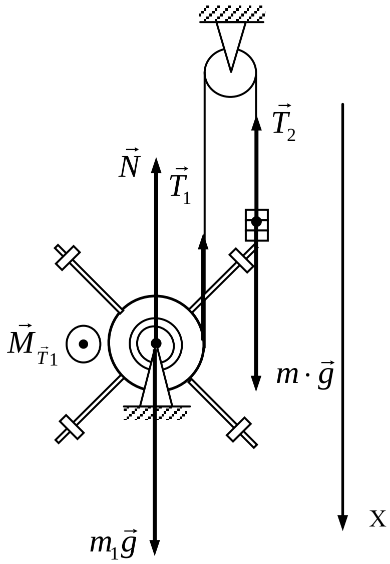


Рис. 2

Запишем второй закон Ньютона для груза:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}_2$$
$$OX: \quad ma = mg - T_2 \tag{1}$$

Для вращающегося шкива запишем уравнение вращательного движения ($\sum M_Z = J_Z \varepsilon$) в проекции на ось вращения (ось OZ). Направим ось OZ перпендикулярно плоскости рисунка на нас. Моменты сил тяжести $m_1\vec{g}$ и силы реакции оси вращения $\vec{N}$ относительно оси OZ, проходящей через ось вращения, равны нулю (линии действия сил пересекают ось OZ). С учетом этого имеем следующее уравнение:

$$M_{T_1Z} = J_Z \varepsilon \tag{2}$$

Проекция вектора углового ускорения на ось OZ и вектора момента силы натяжения положительны, можем записать следующие равенства: $\boldsymbol{\varepsilon}_Z = \boldsymbol{\varepsilon}$; $M_{T_1Z} = M_{T_1}$. Учитывая, что тангенциальное ускорение точки A шкива совпадает с ускорением поступательного движения груза ($a_\tau = a$), можем написать следующее соотношение:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{a_\tau}{r} = \frac{a}{r} \tag{4}$$

Если известно время движения груза (t) и его перемещение (h), то ускорение поступательного движения груза находится из формулы:

$$a = \frac{2h}{t^2} \tag{5}$$

Пренебрегая массой блока 9 (см. рис. 1), можем записать соотношение $T_1 \approx T_2$. Используя данное предположение и определение момента силы, из равенства (1) находим величину силы T_2, а затем величину момента силы T_1:

$$M_{T_1Z} = T_1 r \approx m(g-a)r\,. \tag{6}$$

Используя соотношение (5) легко можно получить формулы для углового ускорения и момента силы натяжения, выраженные через время движения груза t и его высоту падения h:

$$\varepsilon = \frac{2h}{rt^2}\,, \tag{7}$$

$$M_{T_1} = m(g - \frac{2h}{t^2})r\,. \tag{8}$$

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Упражнение №1. Проверка точности работы прибора

1. Закрепите грузы m_0 на некотором заданном преподавателем расстоянии R от оси вращения шкива (см. рис.1)
2. Установите верхний подвижный кронштейн 17 на заданной высоте h (высота задается преподавателем).
3. Проведите пять замеров времени падения груза m и результаты занесите в таблицу 1.

Таблица №1

N_{on}	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	$\sum$
t_i						
$\left(\langle t\rangle - t_i\right)^2$						

4. Рассчитайте среднее значение времени падения груза $\langle t\rangle = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{5}$.
5. Определите значение дисперсии опыта $S_{on}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5}(t_i - <t>)^2}{n-1}$, где n - число измерений.

Если $\dfrac{S_{on}^2}{\langle t\rangle^2} \le 0.05$, то установка работает нормально.

Упражнение 2. Определение углового ускорение шкива и его дисперсии

1. Зная время движения груза m для заданной высоты h (см. упр. № 1), заполните графу 2 таблицы № 2.
2. Измерьте радиус шкива r.
3. По формуле $\varepsilon = \dfrac{2h}{rt^2}$ найдите пять значений величины углового ускорения. Полученные значения занесите в табл.№
4. По формуле $S_\varepsilon^2 = \left(\dfrac{2}{r<t>^2}\right)^2 S_h^2 + \left(\dfrac{-2h}{r^2<t>^2}\right)^2 S_r^2 + \left(\dfrac{-4h}{r<t>^3}\right)^2 S_t^2$ рассчитайте дисперсию углового ускорения. В качестве дисперсии высоты h и радиуса шкива r возьмите квадрат приборной погрешности ($S_r^2 = S_h^2 = 25\cdot 10^{-8}$ $м^2$). Величину дисперсии времени падения S_t^2 возьмите из первого упражнения. Результаты вычислений занесите в табл. № 2.

Таблица №2

№ опыта	t_i, с	ε_i, рад/с$^{-2}$	S_ε^2
1			
2			
3			
4			
5			

5. Окончательный ответ запишите в виде: $\varepsilon = \langle\varepsilon\rangle \pm S_\varepsilon$.

Упражнение 3. Проверка уравнения вращательного движения маятника

1. Установите кронштейн 17 на высоты 30 см + N см, где N -номер вашей бригады.
2. Проведите замеры времени падения груза t_i для пяти различных масс грузов m, движущихся поступательно для заданного преподавателем расстояния R грузов m_0 на крестовине 16. Результаты измерений времени падения t_i занести в табл. №3. Массы грузов m_i занесите в графу № 2 а высоту падения в графу № 4.
3. Измерьте диаметр шкива D и занесите в графу № 5.

Таблица №3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ опыта	m_i	t_i	h	D	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$	$\left(y_i - A\cdot x_i\right)^2$
$\sum$									

Для проверки линейной зависимости между угловым ускорением шкива и моментом сил, действующих на него, введем следующие обозначения:

$$y_i = \varepsilon_i = \frac{4h}{t_i^2 D}; \qquad x_i = \left(M_{T_1}\right)_i = m_i\left(g - \frac{2h}{t_i^2}\right)\frac{D}{2}. \tag{9}$$

4. По данным формулам вычислите значения величин x_i и y_i. Результаты расчетов занесите в графы №6 и 7.
5. Заполните графы 8 и 9. В рамках предположения о линейной зависимости между x и y ($y = Ax$) найдите согласно условию наименьших квадратов параметр A по формуле

$$A = \frac{\sum_i x_i \cdot y_i}{\sum_i x_i^2}.$$

6. Зная величину параметра A, заполните графу № 10. Вычислите дисперсию адекватности по формуле:

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_i (y_i - Ax_i)^2}{n-1},$$ где n - число совместных измерений.

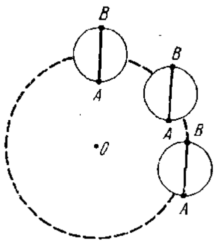
7. По формуле $F_{выч} = \dfrac{S_{ад}^2}{S_{оп}^2}$ вычислите критерий Фишера (дисперсию опыта $S_{оп}^2$ возьмите из упражнения № 2).
8. Полученное значение критерия Фишера сравните с табличным значением ($F_{табл} = 6{,}59$).

Если выполняется неравенство $\dfrac{1}{F_{табл}} \le F_{выч} \le F_{табл}$, то с вероятностью 95% можно утверждать, что зависимость между x и y (то есть между угловым ускорением ε и моментом внешних сил M) в нашем эксперименте имеет линейный характер. В этом случае уравнение вращательного движения $M = I\varepsilon$ для шкива выполняется.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое поступательное и вращательное движения. Их основные особенности.
2. Сформулируйте определения следующих величин: скорости $\vec{v}$, ускорения $\vec{a}$, угла поворота φ, угловой скорости ω и углового ускорения ε, а также момента силы относительно неподвижной точки M и относительно неподвижной оси M_z.
3. Что такое сила F и масса тела m.
4. Что такое момент инерции материальной точки и момент инерции твёрдого тела I.
5. Сформулируйте и запишите основное уравнение динамики поступательного движения и основное уравнение динамики вращательного движения.

Основные теоретические сведения



Поступательным называется движение, при котором любая прямая, проведённая в теле, остаётся параллельной сама себе при движении тела.

Основными особенностями такого вида движения являются следующие обстоятельства:

- *при поступательном движении все точки тела движутся совершенно одинаково, то есть имеют одну и ту же скорость, ускорение, траектории движения, совершают одинаковые перемещения и проходят одинаковый путь.*
- *в этом случае при описании движения тела его можно рассматривать как материальную точку.*

Для описания поступательного движения тел вводят в рассмотрение следующие понятия:

Для характеристики быстроты перемещения тела в пространстве вводят понятие ***скорости*** $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \text{размерность скорости: } [v] = \frac{м}{с}, \text{ метр в секунду.}$$

Физический смысл скорости: *она показывает, какое перемещение совершает тело за единицу времени при равномерном движении.*

(пример: $v = 5\frac{м}{с}$ означает, что тело за каждую секунду перемещается на 5 м.)

Вектор скорости направлен по касательной к траектории движения материальной точки.

Для характеристики быстроты изменения скорости по величине и направлению вводят понятие ускорения $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \text{размерность ускорения: } [a] = \frac{м}{с^2}, \text{ метр на секунду в квадрате.}$$

Таким образом, ускорением называется векторная величина, равная первой производной по времени от мгновенной скорости тела.

Физический смысл ускорения: *оно показывает, на сколько изменяется скорость тела за единицу времени при равнопеременном движении.*

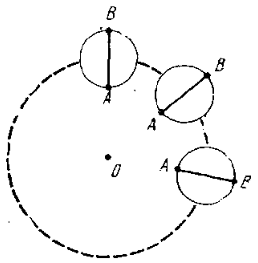
(например: $a = 10\frac{м}{с^2}$ означает, что скорость тела изменяется на $10\frac{м}{с}$ за каждую секунду.)

Направление вектора ускорения $\vec{a}$ совпадает с направлением вектора $d\vec{v}$.

При прямолинейном движении тела ускорение $\vec{a}$ сонаправлено с вектором $\vec{v}$ в случае ускоренного движения тела и противоположно направлено при замедленном движении.

При криволинейном движении вектор ускорения $\vec{a}$ в общем случае образует с вектором мгновенной скорости $\vec{v}$ некоторый угол α.

Кинематика вращательного движения



Вращательным называется движение, при котором все точки тела описываю окружности, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой ***осью вращения тела***.

Основной особенностью вращательного движения является следующее обстоятельство:

при вращательном движении все точки тела движутся с одной и той же угловой скоростью и угловым ускорением и совершают одинаковые угловые перемещения.

Для описания вращательного движения тела вводят в рассмотрение следующие понятия:

Угол поворота φ (фи)- это угол, на который поворачивается радиус-вектор любой точки тела при его вращении.

$$[\varphi] = рад, \text{ радиан.}$$

Элементарное угловое перемещение $d\varphi$ можно рассматривать как вектор $d\vec{\varphi}$, направление которого определяется по правилу буравчика (правилу правого винта):

если буравчик установить вдоль оси вращения тела и вращать рукоятку буравчика по направлению вращения тела, то поступательное движение буравчика укажет направление вектора $d\vec{\varphi}$ (см. рис. 3).

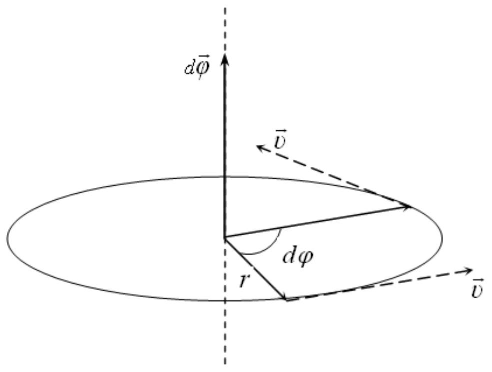


рис. 3

Удобство такого введения в следующем: - модуль вектора $d\vec{\varphi}$ однозначно определяет величину элементарного поворота тела $d\varphi$,

- направление вектора $d\vec{\varphi}$ через правило буравчика определяет направление вращения тела,
- положение вектора $d\vec{\varphi}$ в пространстве определяет ось вращения тела.

Для характеристики быстроты вращения тела вводится понятие ***угловой скорости*** ω (омега):

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad \text{размерность } [\omega] = \frac{рад}{с}, \text{ радиан в секунду.}$$

Мгновенная угловая скорость $\vec{\omega}$ есть первая производная угла поворота тела по времени.

Физический смысл угловой скорости: *она показывает, на какой угол поворачивается радиус-вектор любой точки тела за единицу времени при равномерном вращении.*

(например: $\omega = 2\dfrac{рад}{с}$ означает, что за каждую секунду радиус-вектор поворачивается на 2 радиана)

Направление мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ совпадает с направлением вектора $d\vec{\varphi}$, то есть она также направлена вдоль оси вращения и её направление определяется по правилу буравчика.

Для характеристики быстроты изменения угловой скорости вводится понятие ***углового ускорения*** $\vec{\varepsilon}$ (эпсилон):

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \text{ размерность } [\varepsilon] = \frac{рад}{с^2}, \text{ радиан на секунду в квадрате.}$$

Физический смысл углового ускорения: *оно показывает, на сколько изменяется угловая скорость тела за единицу времени при равнопеременном вращении.*

(например: $\varepsilon = 1\dfrac{рад}{с^2}$ означает, что за каждую секунду угловая скорость тела изменяется на $1\dfrac{рад}{с}$.)

Направление вектора углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора $d\vec{\omega}$, то есть оно сонаправлено с вектором $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении тела и противоположно направлено при замедленном вращении.

Основы динамики поступательного и вращательного движения тела.

Для описания взаимодействия одного тела на другое вводят понятие силы $\vec{F}$.

Силой F называется векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело других тел или физических полей и характеризующая величину и направление этого воздействия.

Под действием силы тело может:
- деформироваться (статическое проявление силы),
- приобретать ускорение (динамическое проявление силы).

Массой тела m называется скалярная величина, характеризующая инертные и гравитационные свойства тела.

Масса тела – величина аддитивная (то есть масса тела равна сумме масс всех его частей).

Основным уравнением динамики поступательного движения тела является второй закон Ньютона.

Одной из формулировок этого закона является следующая:

В инерциальной системе отсчёта векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна произведению массы этого тела на сообщённое ему ускорение.

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a},$$

где F - сила, $[F] = \dfrac{кг \cdot м}{с^2} = Н$, Ньютон, m - масса тела, $[m] = кг$, килограмм, a - ускорение тела, $[a] = \dfrac{м}{с^2}$.

Опыт показывает, что при описании вращательного движения твёрдого тела, кроме величины и направления действующей на тело силы, важной характеристикой является ещё и точка приложения этой силы.

В связи с этим вводят в рассмотрение понятие момента силы $\vec{M}$.

Моментом силы $\vec{M}$ ***относительно неподвижной точки О*** называется векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки О в точку приложения силы $\vec{F}$, на саму эту силу:

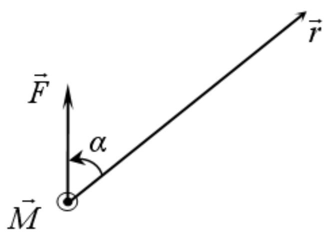


рис. 4

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right], \quad \text{где } [M] = Н \cdot м, \text{ Ньютон · метр.}$$

Направление вектора момента силы $\vec{M}$ определяется ***по правилу векторного произведения*** (или ***правилу буравчика***)**:**

если буравчик вращать от первого сомножителя в векторном произведении $\vec{r}$ *ко второму* $\vec{F}$ *по кратчайшему повороту, то поступательное движение буравчика укажет направление вектора* $\vec{M}$ (см. рис. 4)

Следует помнить, что перед применением этого правила необходимо параллельным переносом совместить начала перемножаемых векторов с точкой О.

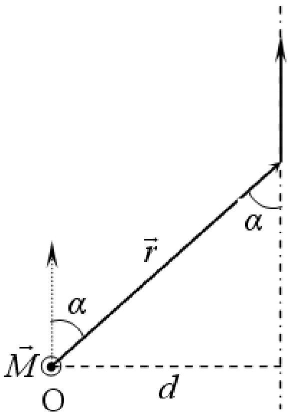


рис. 5

Можно использовать более простое ***правило буравчика***:

если рукоятку буравчика вращать по направлению действия силы $\vec{F}$, то поступательное движение буравчика будет совпадать с направлением вектора момента силы $\vec{M}$ (см. рис. 5).

На рис. 4 и 5 вектор $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа на нас.

При этом следует помнить, что

- начало вектора $\vec{M}$ совпадает с точкой О,
- сам вектор перпендикулярен одновременно векторам $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а его величину можно определить по формуле:

$$M = rF\sin\alpha \quad \text{или} \quad M = Fd,$$

где α - угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а величина $d = r\sin\alpha$ называется *плечом силы* $\vec{F}$, $[d] = м$, метр.

Плечом силы d называется кратчайшее расстояние от точки О до линии действия силы $\vec{F}$ (см. рис. 5).

Величина вектора $\vec{M}$ зависит от выбора точки О.

Моментом силы M_Z ***относительно неподвижной оси Z*** называется скалярная величина, равная проекции на эту ось Z вектора момента силы $\vec{M}$ относительно любой точки О, выбранной на этой оси:

$$M_Z = \left[\vec{r}\vec{F}\right]_Z.$$

Величина M_Z не зависит от выбора точки О на этой оси Z.

Наблюдения показывают, что при рассмотрении вращательного движения тела, основной характеристикой инертных свойств тела является не масса этого тела m, а величина, которая называется ***моментом инерции тела*** I.

Различают момент инерции тела относительно точки и момент инерции тела относительно оси.

Моментом инерции материальной точки относительно оси Z называется величина равная $I = mr^2$,

где r - кратчайшее расстояние от оси Z до материальной точки массой m.

Моментом инерции тела относительно оси Z называется величина равная

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,$$

где r_i - кратчайшее расстояние от оси Z до элементарной массы тела m_i.

Основной особенностью момента инерции тела I является то обстоятельство, что его величина зависит от выбора оси вращения тела и распределения массы тела относительно рассматриваемой оси. То есть в отличие от массы m, одно и то же тело имеет бесконечное множество моментов инерции I, в зависимости от выбора оси вращения.

В общем случае момент инерции тела относительно произвольной оси можно рассчитать по формуле:

$$I = \int_V r^2 \rho dV,$$

где $[I] = кг \cdot м^2$ (килограмм-метр), ρ (ро) - это функция зависимости плотности тела от координат, а сам интеграл определяется по всему объёму данного тела.

Однако на практике моменты инерции тел обычно определяют опытным путём, в связи с тем, что математически определить момент инерции тела иногда бывает очень сложно (более подробно о моменте инерции смотрите лабораторную работу 1-4).

Основным уравнением динамики вращательного движения тела является закон аналогичный второму закону Ньютона, одной из возможных формулировок которого является следующая:

В инерциальной системе отчёта алгебраическая сумма моментов всех внешних сил $\sum M_{Z_i}$, действующих на тело относительно неподвижной оси Z, равна произведению момента инерции этого тела относительно этой оси I_Z, на сообщённое ему угловое ускорение ε:

$$\sum M_{Z_i} = I_Z \varepsilon.$$