профессор, к.т.н. Миндолин С.Ф., ст. преподаватель Маслов В.А.

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1-2: ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Студент ______________________________________________________________ группа_________________

Допуск ________________________________________ Выполнение _________________________ Защита ________________

**Цель работы**: исследование зависимости величины углового ускорения абсолютно твердого тела от приложенных к нему моментов сил при вращении этого тела вокруг закрепленной оси.

**Приборы и принадлежности**: прибор для изучения вращательного движения тела.

## ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Экспериментальная установка маятник Обербека представлена на рис. 1.

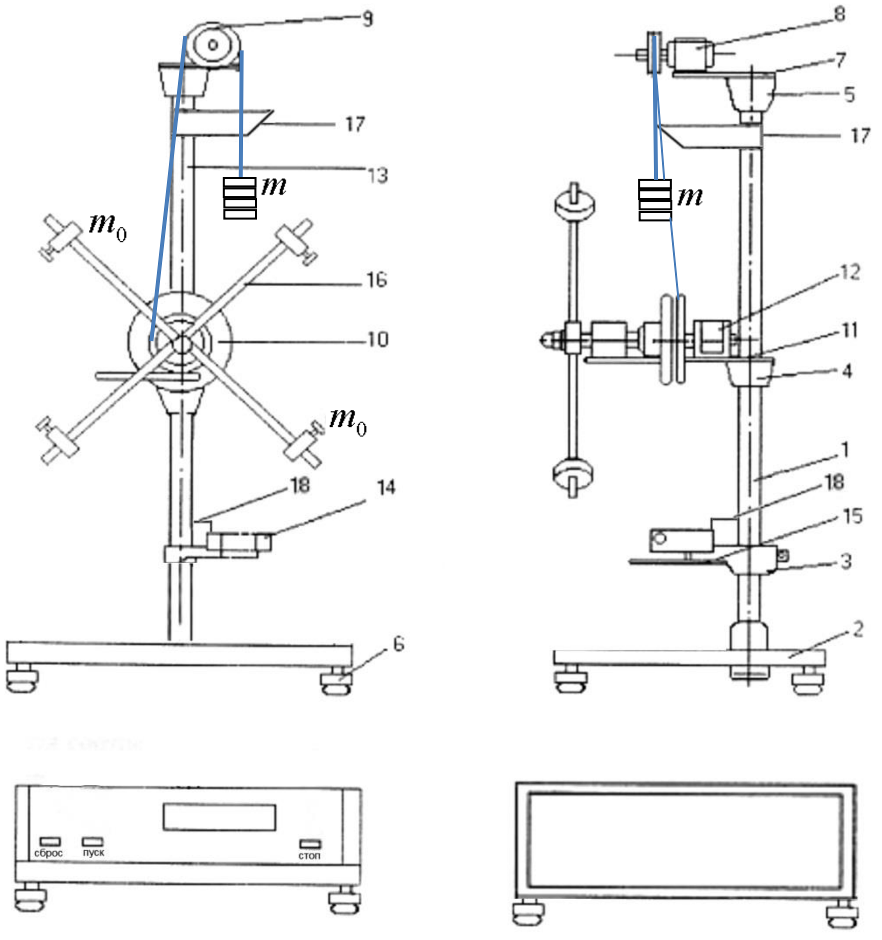



Рис. 1

Основные элементы маятника Обербека:

основание - 2, вертикальная стойка - 1, верхний кронштейн - 17, который можно перемещать вдоль колонны и фиксировать в любом положении, определяя длину пути движения груза, средний кронштейн - 4, на котором размещен узел подшипников 12 с малоинерционным шкивом 10, кронштейн - 18 для размещения фотодатчика 14.

Основание - 2 снабжено регулируемыми опорами и зажимом для фиксации стойки.

3 - нижний кронштейн неподвижный, на котором закреплен фотоэлектрический датчик 14, вырабатывающий электроимпульс конца измерения времени движения груза и включающий тормозной электромагнит 12 и кронштейн 15 с резиновыми амортизаторами, ограничивающими движение грузов,

5 – верхняя втулка, на которой посредством основания закрепляется подшипниковый узел 8 и диск 9 , через который перебрасывается нить. Одним концом нить прикрепляется к двухступенчатому шкиву 10 , а вторым концом ее прикрепляют к грузу массой $m$ .

В данной установке груз движется поступательно, а шкив вместе с прикрепленными к нему телами вращаются. Изобразим все силы, действующие на движущийся груз: $m\vec{g}$ -сила тяжести груза; $\vec{T}_2 -$ сила натяжения нити. Изобразим

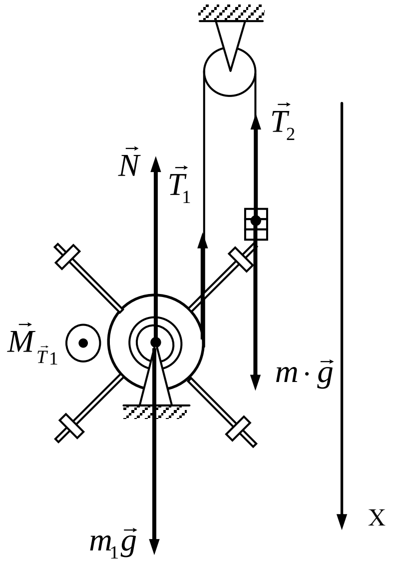



Рис. 2

также силы, действующие на шкив: $\vec{N} -$ сила реакции оси вращения; $m\vec{g}$ - сила тяжести шкива вместе с прикрепленными к нему телами; $\vec{T}_1 -$ сила натяжения нити. Моментом сил трения пренебрегаем.

Запишем второй закон Ньютона для груза:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}_2$$
$$OX: \quad ma = mg - T_2 \qquad (1)$$

Для вращающегося шкива запишем уравнение вращательного движения ($\sum M_Z = J_Z\varepsilon$) в проекции на ось вращения (ось OZ). Направим ось OZ перпендикулярно плоскости рисунка на нас. Моменты сил тяжести $m_1\vec{g}$ и силы реакции оси вращения $\vec{N}$ относительно оси OZ, проходящей через ось вращения, равны нулю (линии действия сил пересекают ось OZ). С учетом этого имеем следующее уравнение:

$$M_{T_1Z} = J_Z\varepsilon \qquad (2)$$

Проекция вектора углового ускорения на ось OZ и вектора момента силы натяжения положительны, можем записать следующие равенства: $\boldsymbol{\varepsilon}_Z = \boldsymbol{\varepsilon}$; $M_{T_1Z} = M_{T_1}$. Учитывая, что тангенциальное ускорение точки А шкива совпадает с ускорением поступательного движения груза ($a_\tau = a$), можем написать следующее соотношение:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{a_\tau}{r} = \frac{a}{r} \qquad (4)$$

Если известно время движения груза (t) и его перемещение (h), то ускорение поступательного движения груза находится из формулы:

$$a = \frac{2h}{t^2} \qquad (5)$$

Пренебрегая массой блока 9 (см. рис. 1), можем записать соотношение $T_1 \approx T_2$. Используя данное предположение и определение момента силы, из равенства (1) находим величину силы $T_2$, а затем величину момента силы $T_1$:

$$M_{T_1Z} = T_1 r \approx m(g - a)r. \qquad (6)$$

Используя соотношение (5) легко можно получить формулы для углового ускорения и момента силы натяжения, выраженные через время движения груза $t$ и его высоту падения $h$:

$$\varepsilon = \frac{2h}{rt^2}, \qquad (7)$$

$$M_{T_1} = m(g - \frac{2h}{t^2})r. \qquad (8)$$

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

### **Упражнение №1.** Проверка точности работы прибора

1. Закрепите грузы $m_0$ на некотором заданном преподавателем расстоянии $R$ от оси вращения шкива (см. рис.1)
2. Установите верхний подвижный кронштейн 17 на заданной высоте $h$ (высота задается преподавателем).
3. Проведите пять замеров времени падения груза $m$ и результаты занесите в таблицу 1.

***Таблица №1***

| $N_{on}$ | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | | | | | | |
| $\left(\langle t\rangle - t_i\right)^2$ | | | | | | |

4. Рассчитайте среднее значение времени падения груза $\langle t\rangle = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{5}$.
5. Определите значение дисперсии опыта $S_{on}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5}(t_i - <t>)^2}{n-1}$, где $n$ - число измерений.

Если $\dfrac{S_{on}^2}{\langle t\rangle^2} \le 0.05$, то установка работает нормально.

### **Упражнение 2.** Определение углового ускорение шкива и его дисперсии

1. Зная время движения груза $m$ для заданной высоты $h$ (см. упр. № 1), заполните графу 2 таблицы № 2.
2. Измерьте радиус шкива $r$.
3. По формуле $\varepsilon = \dfrac{2h}{rt^2}$ найдите пять значений величины углового ускорения. Полученные значения занесите в табл.№
4. По формуле $S_\varepsilon^2 = \left(\dfrac{2}{r<t>^2}\right)^2 S_h^2 + \left(\dfrac{-2h}{r^2<t>^2}\right)^2 S_r^2 + \left(\dfrac{-4h}{r<t>^3}\right)^2 S_t^2$ рассчитайте дисперсию углового ускорения. В качестве дисперсии высоты $h$ и радиуса шкива $r$ возьмите квадрат приборной погрешности ($S_r^2 = S_h^2 = 25\cdot10^{-8}$ $м^2$). Величину дисперсии времени падения $S_t^2$ возьмите из первого упражнения. Результаты вычислений занесите в табл. № 2.

***Таблица №2***

| № опыта | $t_i$ | $\varepsilon_i$ | $S_\varepsilon^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |

5. Окончательный ответ запишите в виде: $\varepsilon = \langle\varepsilon\rangle \pm S_\varepsilon$.

### **Упражнение 3.** Проверка уравнения вращательного движения маятника

1. Установите кронштейн 17 на высоты 30 см + N см, где N -номер вашей бригады.
2. Проведите замеры времени падения груза $t_i$ для пяти различных масс грузов $m$, движущихся поступательно для заданного преподавателем расстояния $R$ грузов $m_0$ на крестовине 16. Результаты измерений времени падения $t_i$ занести в табл. №3. Массы грузов $m_i$ занесите в графу № 2 а высоту падения в графу № 4.
3. Измерьте диаметр шкива $D$ и занесите в графу № 5.

***Таблица №3***

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| № опыта | $m_i$ | $t_i$ | $h$ | $D$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $x_i \cdot y_i$ | $\left(y_i - A\cdot x_i\right)^2$ |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| $\sum$ | | | | | | | | | |

Для проверки линейной зависимости между угловым ускорением шкива и моментом сил, действующих на него, введем следующие обозначения:

$$y_i = \varepsilon_i = \frac{4h}{t_i^2 D}; \qquad x_i = \left(M_{T_1}\right)_i = m_i\left(g - \frac{2h}{t_i^2}\right)\frac{D}{2}. \qquad (9)$$

4. По данным формулам вычислите значения величин $x_i$ и $y_i$. Результаты расчетов занесите в графы №6 и 7.
5. Заполните графы 8 и 9. В рамках предположения о линейной зависимости между $x$ и $y$ ($y = Ax$) найдите согласно условию наименьших квадратов параметр $A$ по формуле

$$A = \frac{\sum_i x_i \cdot y_i}{\sum_i x_i^2}.$$

6. Зная величину параметра $A$, заполните графу № 10. Вычислите дисперсию адекватности по формуле:

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_i (y_i - Ax_i)^2}{n-1},$$ где $n$ - число совместных измерений.

7. По формуле $F_{выч} = \dfrac{S_{ад}^2}{S_{оп}^2}$ вычислите критерий Фишера (дисперсию опыта $S_{оп}^2$ возьмите из упражнения № 2).
8. Полученное значение критерия Фишера сравните с табличным значением ($F_{табл} = 6{,}59$).

Если выполняется неравенство $\dfrac{1}{F_{табл}} \le F_{выч} \le F_{табл}$, то с вероятностью 95% можно утверждать, что зависимость между $x$ и $y$ (то есть между угловым ускорением $\varepsilon$ и моментом внешних сил $M$) в нашем эксперименте имеет линейный характер. В этом случае уравнение вращательного движения $M = I\varepsilon$ для шкива выполняется.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

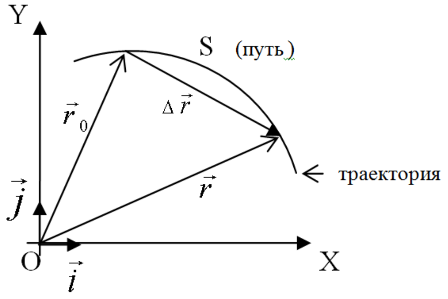
1. Что такое поступательное и вращательное движения. Их основные особенности.
2. Сформулируйте определения следующих величин: скорости $\vec{v}$, ускорения $\vec{a}$, угла поворота $\varphi$, угловой скорости $\omega$ и углового ускорения $\varepsilon$, а также момента силы относительно неподвижной точки $M$ и относительно неподвижной оси $M_z$.
3. Что такое сила $F$ и масса тела $m$.
4. Что такое момент инерции материальной точки и момент инерции твёрдого тела $I$.
5. Сформулируйте и запишите основное уравнение динамики поступательного движения и основное уравнение динамики вращательного движения.

## Основные теоретические сведения

**Механика** – раздел физики, изучающий механическое движение и взаимодействие материальных тел.

**Основные разделы механики:**

- **кинематика** (изучает движение тел без учёта сил, вызывающих эти движения),
- **динамика** (изучает закономерности движения тел, обусловленные действующими на них силами),
- **статика** (изучает законы равновесия тел).




**Материальная точка** - это тело, размерами и формой которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

**Механическим движением** – называется перемещение тела в пространстве относительно других тел с течением времени.

Для описания движения материальной точки необходима система отчета.

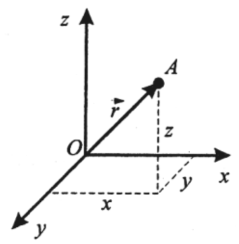
**Системой отсчета** называется совокупность тела отсчета, системы координат и часов для измерения времени.

**Траектория** – это линия, по которой движется материальная точка.

**Путь S** – это длина траектории, по которой двигалась материальная точка.

Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором $\vec{r}$ **.**

**Радиус – вектор** $\vec{r}$ – это вектор, проведённый из начала координат в рассматриваемую материальную точку.



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,,\ [м],\ \text{метр.}$$

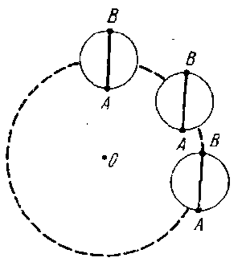
где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы осей координат (орты);

$x, y, z$ — координаты точки.

Модуль радиус – вектора равен : $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

**Перемещение** $\Delta\vec{r}$ – это вектор, направленный из начального положения материальной точки в её конечное положение: $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, где $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ - это начальный и конечный радиус – вектор материальной точки. $[\vec{r}] = [м]$, метр

### Кинематика поступательного движения



***Поступательным*** называется движение, при котором любая прямая, проведённая в теле, остаётся параллельной сама себе при движении тела.

Основными особенностями поступательного движения являются следующие обстоятельства:

*при поступательном движении все точки тела движутся совершенно одинаково, то есть имеют одну и ту же скорость, ускорение, траектории движения, совершают одинаковые перемещения и проходят одинаковый путь.*

*в этом случае при описании движения тела его можно рассматривать как материальную точку.*

Для описания поступательного движения тел вводят в рассмотрение следующие понятия:

Для характеристики быстроты перемещения тела в пространстве вводят понятие ***мгновенной скорости*** $\vec{\upsilon}$ :

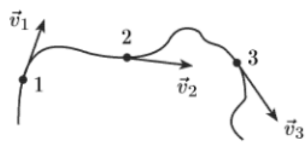
$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \text{размерность скорости: } [\upsilon] = \frac{м}{c}, \text{ метр в секунду.}$$

Мгновенная скорость $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}\,,\ \left[\dfrac{м}{c}\right]$, где $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}, \upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}, \upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$ - проекции скорости $\vec{\upsilon}$ на оси координат.

Модуль скорости тела равен: $\quad \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}\,.$

Таким образом, ***мгновенной скоростью*** называется векторная величина, равная первой производной радиус-вектора материальной точки по времени.

**Физический смысл скорости:** *она показывает, какое перемещение совершает тело за единицу времени при равномерном движении.*



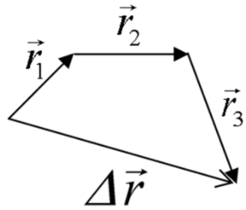
(пример: $\upsilon = 5\dfrac{м}{c}$ означает, что тело за каждую секунду перемещается на 5 м.)

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории движения материальной точки.

Кроме мгновенной скорости существует ещё средняя скорость.

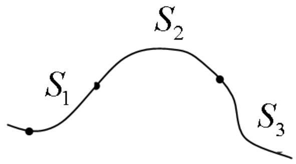
Следует различать: - среднюю скорость по перемещению (или среднюю скорость) $\langle\vec{\upsilon}\rangle$ (величина векторная),

- среднюю путевую скорость $\langle\upsilon\rangle$ (величина скалярная).




***Средней скоростью по перемещению*** $\langle\vec{v}\rangle$ (вэ) называется векторная величина, равная отношению перемещения тела $\Delta\vec{r}$ (дэльта эр) за какой-либо промежуток времени $\Delta t$ (дэльта тэ), к величине этого промежутка времени:

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \ldots + \vec{r}_n}{t_1 + t_2 + \ldots t_n}$$




***Средней путевой скоростью*** $\langle v \rangle$ (вэ) называется скалярная величина, равная отношению пути $S$ пройденного телом за какой- либо промежуток времени $t$, к величине этого промежутка времени:

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n}$$

**Особый случай:** Если тело за рассматриваемый промежуток времени движется в одном и том же направлении с одним и тем же по величине и направлению ускорением (то есть $\vec{a} = const$), то среднюю скорость тела за этот промежуток времени можно определить по формуле: $\langle v \rangle = \dfrac{v_1 + v_2}{2}$, где $v_1$ и $v_2$ - это начальная и конечная скорости тела на этом участке. материальной точки.

## Ускорение $\vec{a}$

Для характеристики быстроты изменения скорости по величине и направлению вводят понятие ускорения $\vec{a}$:
Различают среднее и мгновенное ускорения.

***Средним ускорением*** называется векторная величина, равная отношению изменения скорости тела $\Delta\vec{v}$ за какой-либо промежуток времени $\Delta t$, к величине этого промежутка времени:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1},$$

где $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ - изменение скорости тела за время $\Delta t$,

$\Delta t = t_2 - t_1$ -промежуток времени, за который изменилась скорость тела,

$v_2$ - скорость тела в момент времени $t_2$; $v_1$ - скорость тела в момент времени $t_1$.

***Мгновенным ускорением*** называется векторная величина, равная первой производной вектора мгновенной скорости тела по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

где $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}, a_y = \dfrac{dv_y}{dt}, a_z = \dfrac{dv_z}{dt}$ - проекции вектора мгновенного ускорения на оси координат.

Величина вектора мгновенного ускорения равна: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;

$[a] = \dfrac{м}{c^2}$, метр на секунду в квадрате.

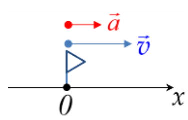
**Физический смысл ускорения** $\vec{a}$**:** *оно показывает, на сколько метров в секунду изменяется скорость тела за одну секунду при равнопеременном движении.*

(например: $a = 10\dfrac{м}{c^2}$ означает, что скорость тела изменяется на $10\dfrac{м}{c}$ за каждую секунду.)

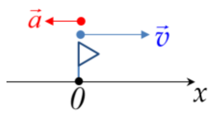
По виду траектории различают ***прямолинейное*** и ***криволинейное*** движение материальной точки.

### Прямолинейное движение материальной точки

При прямолинейном движении тела ускорение $\vec{a}$:

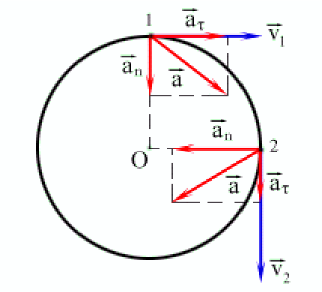



- сонаправлено с вектором мгновенной скорости тела $\vec{v}$ в случае ускоренного движения,
(то есть скорость с течением времени увеличивается)




- противоположно направлено вектору мгновенной скорости тела $\vec{v}$ при замедленном движении.
(то есть скорость с течением времени уменьшается)

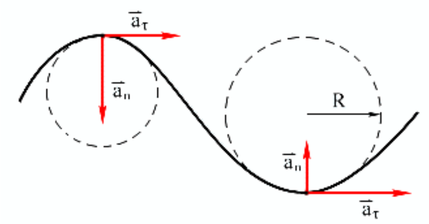
## Криволинейное движение материальной точки




При криволинейном движении вектор ускорения $\vec{a}$ в общем случае образует с вектором мгновенной скорости $\vec{v}$ некоторый угол $\alpha$.

В этом случае вектор полного ускорения удобно разложить на две составляющие $a_\tau$ и $a_n$, где $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$ - тангенциальное (или касательное) ускорение (характеризует быстроту изменения вектора скорости по величине),

$a_n = \dfrac{v^2}{r}$ - нормальное (или центростремительное) ускорение (характеризует быстроту изменения вектора скорости по направлению)

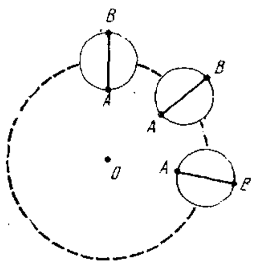



Из рис. следует, что полное ускорение материальной точки при криволинейном движении $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$

Модуль полного ускорение материальной точки при криволинейном движении

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

## Кинематика вращательного движения




***Вращательным*** называется движение, при котором все точки тела описываю окружности, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой ***осью вращения тела***.

Основной особенностью вращательного движения является следующее обстоятельство: *при вращательном движении все точки тела движутся с одной и той же угловой скоростью и угловым ускорением и совершают одинаковые угловые перемещения.*

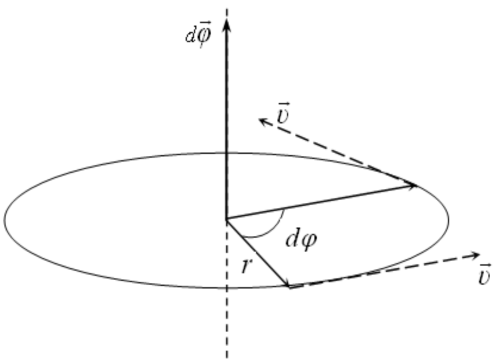



рис. 3

Для описания вращательного движения тела вводят в рассмотрение следующие понятия:

***Угол поворота*** $\varphi$ (фи)- это угол, на который поворачивается радиус-вектор любой точки тела при его вращении.

$$[\varphi] = рад, \text{ радиан.}$$

Элементарное угловое перемещение $d\varphi$ можно рассматривать как вектор $d\vec{\varphi}$, направление которого определяется по **правилу буравчика** (правилу правого винта):

*Если буравчик установить вдоль оси вращения тела и вращать рукоятку буравчика по направлению вращения тела, то поступательное движение буравчика укажет направление вектора* $d\vec{\varphi}$ (см. рис. 3).

Удобство такого введения в следующем:

- модуль вектора $d\vec{\varphi}$ однозначно определяет величину элементарного поворота тела $d\varphi$,
- направление вектора $d\vec{\varphi}$ через правило буравчика определяет направление вращения тела,
- положение вектора $d\vec{\varphi}$ в пространстве определяет ось вращения тела.

Для характеристики быстроты вращения тела в пространстве вводится понятие ***мгновенной угловой скорости*** $\vec{\omega}$ (омега).

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad \text{размерность } [\omega] = \frac{рад}{с}, \text{ радиан в секунду.}$$

Таким образом, ***мгновенная угловая скорость*** $\vec{\omega}$ есть первая производная по времени от угла поворота.

Физический смысл угловой скорости: *она показывает, на какой угол поворачивается радиус-вектор любой точки тела за единицу времени при равномерном вращении.*

(например: $\omega = 2\dfrac{рад}{с}$ означает, что за каждую секунду радиус-вектор поворачивается на 2 радиана)

Направление угловой скорости $\vec{\omega}$ совпадает с направлением вектора $d\vec{\varphi}$, то есть направление $\vec{\omega}$ также определяется по правилу буравчика.

Для характеристики быстроты изменения угловой скорости вводится понятие ***мгновенного углового ускорения*** $\vec{\varepsilon}$ (эпсилон):

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad \text{размерность } [\varepsilon] = \frac{рад}{с^2}, \text{ радиан на секунду в квадрате.}$$

Таким образом, ***мгновенное угловое ускорение*** $\vec{\varepsilon}$ есть первая производная по времени от угловой скорости тела.

Физический смысл углового ускорения: *оно показывает, на сколько изменяется угловая скорость тела за единицу времени при равнопеременном вращении.*

(например: $\varepsilon = 1\dfrac{рад}{c^2}$ означает, что за каждую секунду угловая скорость тела изменяется на $1\dfrac{рад}{c}$.)

Направление вектора углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора $d\vec{\omega}$, то есть оно сонаправлено с вектором $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении тела и противоположно направлено при замедленном вращении.

**Период вращения *T*** (тэ)– это время одного полного оборота.

$T = \dfrac{t}{N}$ , где $t$ – время, за которое точка сделает $N$ оборотов. $[T] = c$

**Частота вращения** $n$ (эн)– это число оборотов за единицу времени.

$n = \dfrac{N}{t}$ , где $N$ – число оборотов за время $t$. $[n] = \dfrac{об}{c} \equiv \dfrac{1}{c}$

Причём $T = \dfrac{1}{n}$

Равномерное движение материальной точки по окружности – это движение с ускорением, которое называется нормальным или центростремительным $a_{ц\ с.}$ (оно характеризует быстроту поворота вектора скорости по направлению и направлено к центру окружности, по которой движется точка).

**Связь линейных и угловых величин**

$$\begin{cases} S = \varphi r \\ v = \omega r \\ a_{цс} = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega v \end{cases} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \qquad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \qquad T = \frac{1}{n}$$

**Уравнения поступательного и вращательного движения**

***Уравнениями движения*** называются уравнения, по которым можно определить координаты тела или радиус-вектор тела в любой момент времени: $\vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Зная уравнения движения, можно определить мгновенную скорость и ускорение тела в любой момент времени

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

либо решить обратную задачу: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int\limits_0^t \vec{v}(t)dt$ или $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int\limits_0^t \vec{a}(t)dt$

**Уравнения равнопеременного поступательного движения**

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad \text{и} \qquad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

или в скалярном виде

$$\begin{cases} x = \pm x_0 \pm v_{ox}t \pm \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y = \pm y_0 \pm v_{oy}t \pm \dfrac{a_y t^2}{2} \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} v_x = \pm v_{0x} \pm a_x t \\ v_y = \pm v_{oy} \pm a_y t \end{cases}$$

**Уравнения равнопеременного вращательного движения**

$$\varphi = \pm\varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad \text{и} \qquad \omega = \pm\omega_0 \pm \varepsilon t$$

**В общем случае уравнения вращательного движения**

$$\varphi(t) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \omega(t)dt \qquad \text{и} \qquad \omega(t) = \omega_0 + \int\limits_0^t \varepsilon(t)dt$$

## Основы динамики поступательного и вращательного движения тела.

Для описания взаимодействия одного тела на другое вводят понятие силы $\vec{F}$.

**Сила** – векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело других тел или полей и характеризующая величину и направление этого воздействия.

Под действием силы тело может:

- деформироваться (статическое проявление силы),
- приобретать ускорение (динамическое проявление силы).

Основным уравнением динамики поступательного движения тела является **второй закон Ньютона**.

Одной из формулировок этого закона является следующая:

*В инерциальной системе отсчёта векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна произведению массы этого тела на сообщённое ему ускорение:* $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$ ,

где $F$ - сила, $[F] = \frac{кг \cdot м}{с^2} = Н$, Ньютон, $m$ - масса тела, $[m] = кг$, килограмм, $a$ - ускорение тела, $[a] = \frac{м}{с^2}$.

Масса тела $m$ является одной из важнейших понятий динамики, характеризующая инертные и гравитационные свойства тела. Масса тела – величина аддитивная (то есть масса тела равна сумме масс всех его частей).

Опыт показывает, что при описании вращательного движения твёрдого тела, кроме величины и направления действующей на тело силы, важной характеристикой является ещё и точка приложения этой силы.

В связи с этим вводят в рассмотрение понятие момента силы $\vec{M}$.

***Моментом силы*** $\vec{M}$ ***относительно неподвижной точки*** **О** называется векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки О в точку приложения силы $\vec{F}$, на саму эту силу: $\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]$, где $[M] = Н \cdot м$, Ньютон · метр.

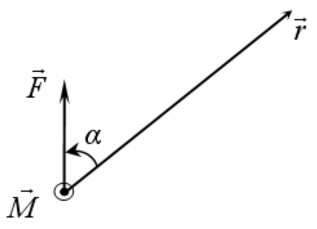


рис. 4

Вектор момента силы $\vec{M}$ является аксиальным, то есть его направление определяется ***по правилу векторного произведения (или правилу буравчика):***

*если рукоятку буравчика вращать от первого сомножителя в векторном произведении* $\vec{r}$ *ко второму* $\vec{F}$ *по кратчайшему повороту, то поступательное движение буравчика укажет направление вектора* $\vec{M}$ (см. рис. 4)

Следует помнить, что перед применением этого правила необходимо совместить начала перемножаемых векторов в точке О.

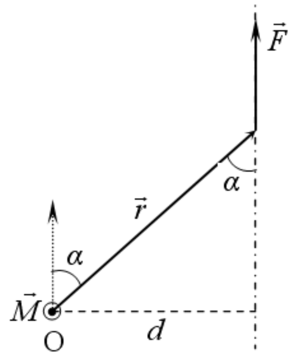


рис. 5

Можно использовать более простое ***правило буравчика***:

*если рукоятку буравчика вращать по направлению действия силы* $\vec{F}$*, то поступательное движение буравчика будет совпадать с направлением вектора момента силы* $\vec{M}$ (см. рис. 5).

На рис. 4 и 5 вектор $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа на нас.

При этом следует помнить, что начало вектора $\vec{M}$ совпадает с точкой О, сам вектор перпендикулярен одновременно векторам $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а его величину можно определить по формуле: $M = rF\sin\alpha$ или $M = Fd$,

где $\alpha$ - угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а величина $d = r\sin\alpha$ называется плечом силы $\vec{F}$, $[d] = м$, метр.

***Плечом силы*** $d$ называется кратчайшее расстояние от точки О до линии действия силы $\vec{F}$ (см. рис. 5).

Величина $\vec{M}$ зависит от выбора точки О.

***Моментом силы*** $M_Z$ ***относительно неподвижной оси*** **Z** называется скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента силы $\vec{M}$ относительно любой точки О, выбранной на этой оси: $M_Z = \left[\vec{r}\vec{F}\right]_Z = Fd$,

где $d$ - плечом силы $\vec{F}$. Величина $M_Z$ не зависит от выбора точки О на этой оси Z.

Наблюдения показывают, что при рассмотрении вращательного движения тела, основной характеристикой инертных свойств тела является не масса этого тела $m$, а величина, которая называется ***моментом инерции тела*** $I$.

Различают момент инерции тела относительно точки и момент инерции тела относительно оси.

***Моментом инерции тела относительно оси Z*** называется величина равная

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2, \tag{1}$$

где $r_i$ - кратчайшее расстояние от оси Z до элементарной массы тела $m_i$.

Для реального твёрдого тела момент инерции относительно неподвижной оси находится при стремлении $n \to \infty$, то есть

$$I_Z = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV,$$

где $[I] = кг \cdot м^2$, $\rho$ - это функция зависимости плотности тела от координат, а сам интеграл определяется по всему объёму данного тела. Однако на практике моменты инерции тел обычно определяют опытным путём, в связи с тем, что математически определить момент инерции тела бывает очень сложно.

Из анализа уравнения (1) следует, что величина $I_z$ зависит не только от массы тела, но и от её распределения относительно оси вращения, поэтому в общем случае любое тело имеет бесконечное множество различных моментов инерции (в отличие от массы тела *m*, которая является величиной постоянной). Возникает вопрос: *существует ли такая же величина или несколько величин, которые подобно массе тела при поступательном движении, однозначно определяли бы инертные свойства тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?* Оказывается существуют. Это, так называемые, ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ тела. Разберемся, что это такое.

Через центр инерции (центр масс) любого тела можно провести бесконечное множество осей вращения (оси, проходящие через центр инерции тела называются собственными, а моменты инерции тела относительно этих осей – собственными моментами инерции). Однако из всех этих осей для тела произвольной формы всегда можно выбрать ось, относительно которой собственный момент инерции будет МАКСИМАЛЬНЫМ, и ось, относительно которой собственный момент инерции будет МИНИМАЛЬНЫМ, причем две эти оси всегда оказываются взаимно перпендикулярными. Кроме того, только относительно этих двух осей возможно устойчивое вращение тела даже без закрепления этих осей, поэтому их еще называют свободными осями инерции тела.

Эти две свободные оси инерции, а также перпендикулярная им третья ось, пересекающиеся в центре инерции тела называются главными осями инерции, а моменты инерции относительно этих осей главными моментами инерции тела.

*Для симметричных тел одной из главных осей инерции всегда является ось симметрии тела.*

Момент инерции тела относительно любой произвольной оси, непроходящей через центр масс тела можно определить по **теореме Штейнера :**

*Момент инерции тела относительно произвольной оси* $I$ *равен сумме момента инерции тела* $I_O$ *относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной данной, и произведения массы тела m на квадрат расстояния между этими осями* $d^2$:

$$I = I_O + md^2.$$

## Основное уравнение динамики вращательного движения тела относительно неподвижной оси

Основным уравнением динамики вращательного движения тела является закон аналогичный второму закону Ньютона, одной из формулировок которого является следующая:

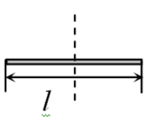
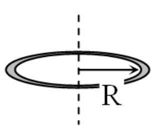
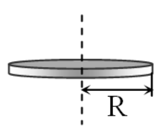
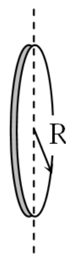
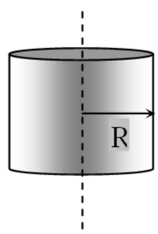
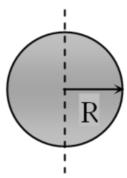
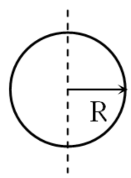
*В инерциальной системе отчёта алгебраическая сумма моментов всех внешних сил* $\sum M_{Z_i}$*, действующих на тело относительно неподвижной оси Z, равна произведению момента инерции этого тела относительно этой оси* $I_Z$*, на сообщённое ему угловое ускорение* $\varepsilon$*:*

$$\sum M_{Z_i} = I_Z \varepsilon .$$

Зная инертные свойства тела, можно рассчитать и другие характеристики этого тела при его вращении. Такие, например, как величину результирующего момента сил, действующих на тело $M_z$, величину момента импульса $L_z$ и кинетическую энергию тела $T_z$ относительно любой неподвижной оси вращения *Z*: $M_z = I_z \varepsilon$; $L_z = I_z \omega$; $T_z = \dfrac{I_z \omega^2}{2}$,

где $I_Z$ – момент инерции тела относительно оси Z; $\varepsilon$ - угловое ускорение тела относительно оси *Z*, $\omega$ - угловая скорость тела относительно этой оси.

В качестве примера ниже приведены значения собственных моментов инерции некоторых тел массой *m*.

| однородный тонкий стержень длиной *l* | однородный тонкий обруч радиусом R | однородный тонкий диск радиусом R | однородный тонкий диск радиусом R | однородный сплошной цилиндр радиусом R | однородный шар радиусом R | однородная сфера радиусом R |
|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  |  |
| $I = \dfrac{ml^2}{12}$ | $I = mR^2$ | $I = \dfrac{mR^2}{2}$ | $I = \dfrac{mR^2}{4}$ | $I = \dfrac{mR^2}{2}$ | $I = \dfrac{2}{5}mR^2$ | $I = \dfrac{2}{3}mR^2$ |