4. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 4.1 Момент инерции

Наблюдения показывают, что при изучении и описании вращательного движения твёрдого тела, основной величиной, характеризующей инертные свойства тел, является не масса тала, а величина, называемая моментом инерции.

Моментом инерции системы (или тела) относительно оси вращения называется физическая величина, равная сумме произведений масс *n* материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2. \tag{4.1}$$

Для реального твёрдого тела момент инерции относительно неподвижной оси находится при стремлении $n \to \infty$, то есть

$$J = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV \ , \tag{4.2}$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Величина *r* в этом случае есть функция положения точки с координатами x, *y, z*.

Из анализа уравнения (4.1) и (4.2) следует, что величина J зависит не только от массы тела, но и от её распределения относительно оси вращения, поэтому в общем случае любое тело может иметь бесконечное множество различных моментов инерции (в отличие от массы тела *m*, которая является величиной постоянной). Возникает вопрос: существует ли такая же величина или несколько величин, которые подобно массе тела при поступательном движении, однозначно определяли бы инертные свойства тела, вращающегося вокруг неподвижной оси? Оказывается существуют. Это, так называемые, ***главные моменты инерции*** тела. Разберёмся, что это такое.

Через центр инерции (центр масс) любого тела можно провести бесконечное множество осей вращения (оси, проходящие через центр инерции тела называются ***собственными***, а моменты инерции тела относительно этих осей – ***собственными моментами инерции***). Однако из всех этих осей для тела произвольной формы всегда можно выбрать ось, относительно которой собственный момент инерции будет максимальным J_{max}, и ось, относительно которой собственный момент инерции будет минимальным J_{min}, причём две эти оси всегда оказываются взаимно перпендикулярными. Кроме того, наблюдения показывают, что только относительно этих двух осей возможно устойчивое вращение тела даже без закрепления этих осей, поэтому их ещё называют ***свободными осями инерции тела***.

Эти две оси, а также перпендикулярная им третья ось, пересекающиеся в центре инерции тела называются ***главными*** (или ***свободными***) ***осями инерции***, а моменты инерции относительно этих осей ***главными моментами инерции тела.***

1. Для тел с произвольной несимметричной формой все три главных момента инерции различны: $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ (такие тела называются ***асимметричными волчками***).
2. Для тел с осевой симметрией (например, однородный цилиндр) два главных момента инерции имеют одинаковую величину, третий же, в общем случае, отличен от них: $J_1 = J_2 \neq J_3$ (такие тела называются ***симметричными волчками***).
3. Для тел с центральной симметрией (например, однородный шар или сфера) все три главных момента инерции равны: $J_1 = J_2 = J_3$ (такие тела называются ***шаровыми волчками***).

Для симметричных тел одной из главных осей инерции всегда является ось симметрии тела.

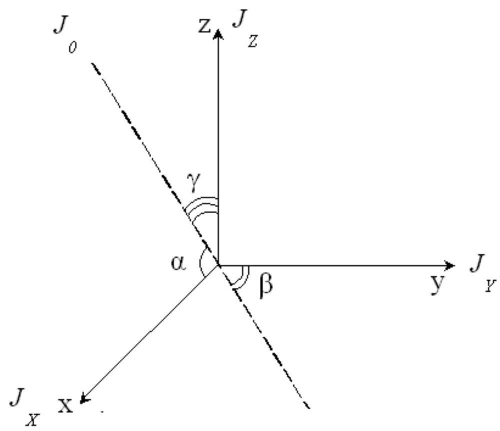


рис. 4.1

Если известны главные моменты инерции тела, то всегда можно рассчитать любой собственный момент инерции тела. Для этого необходимо знать ориентацию этой оси относительно главных осей инерции:

$$J_0 = J_X \cos^2\alpha + J_Y \cos^2\beta + J_Z \cos^2\gamma\,, \qquad (4.3)$$

где J_X, J_Y, J_Z - главные моменты инерции тела; α, β, γ - углы между собственнной осью инерции и соответствующими главными осями инерции (см. рис. 4.1).

Момент инерции относительно любой произвольной оси, непроходящей через центр масс тела можно определить по ***теореме Штейнера*** **:** *момент инерции тела относительно произвольной оси* J *равен сумме момента инерции тела* J_0 *относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела* m *на квадрат расстояния* d^2 *между этими осями:*

$$J = J_0 + md^2$$

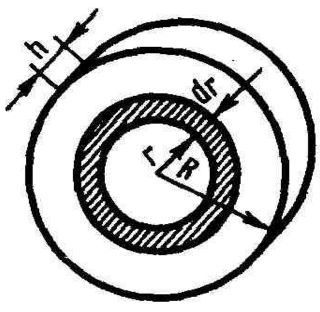


рис. 4.2

В качестве примера найдём момент инерции однородного сплошного цилиндра высотой *h* и радиусом *R* относительно его геометрической оси (рис. 4.2). Разобьем цилиндр на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины *dr* с внутренним радиусом *r* и внешним - *r* + *dr*. Момент инерции каждого полого цилиндра $dJ = r^2 dm$ (так как *dr* << *r*, то считаем, что расстояние всех точек цилиндра от оси равно *r*), где *dm* - масса всего элементарного цилиндра. $2\pi rhdr$ - объём рассматриваемого элементарного цилиндра. Если ρ - плотность материала, то его масса $dm = \rho \cdot 2\pi rhdr$ и $dJ = 2\pi h\rho r^3 dr$. Тогда момент инерции сплошного цилиндра

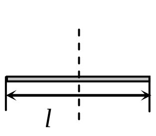
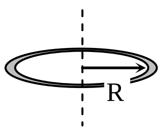
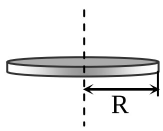
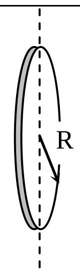
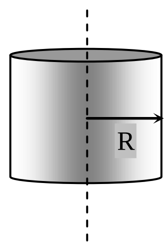
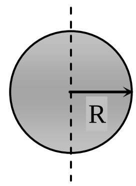
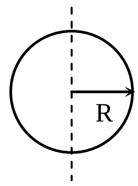
$$J = \int dJ = 2\pi h\rho \int_0^R r^3 dr = \tfrac{1}{2}\pi hR^4\rho\,.$$

Но так как $\pi R^4 h$ — объём цилиндра, то его масса $m = R^2 h\rho$, а момент инерции $J = \dfrac{1}{2} mR^2$.

В заключение приведем значения моментов инерции (см. таблицу 4.1) для некоторых тел (тела считаются однородными, *m* - масса тела).

Таблица 4.1

Собственные моменты инерции некоторых тел

однородный тонкий стержень длиной *l*	однородный тонкий обруч радиусом R	однородный тонкий диск радиусом R	однородный тонкий диск радиусом R	однородный сплошной цилиндр радиусом R	однородный шар радиусом R	однородная сфера радиусом R
						
$I = \dfrac{ml^2}{12}$	$I = mR^2$	$I = \dfrac{mR^2}{2}$	$I = \dfrac{mR^2}{4}$	$I = \dfrac{mR^2}{2}$	$I = \dfrac{2}{5}mR^2$	$I = \dfrac{2}{3}mR^2$

§ 4.2 Кинетическая энергия вращательного движения

Все реально существующие твёрдые тела под влиянием приложенных к ним сил деформируются, т. е. тем или иным образом изменяют свою форму. Для упрощения дальнейших рассуждений введем понятие **абсолютно твердого тела**.

Абсолютно твердым телом *называется тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться и при всех условиях расстояние между двумя точками или, точнее, между двумя частицами, этого тела остается постоянным.* В дальнейшем мы будем рассматривать только такого рода тела.

Рассмотрим абсолютно твёрдое тело, вращающееся около неподвижной оси *OO*, проходящей через него (рис. 4.3). Мысленно разобьём это тело на маленькие объёмы с элементарными массами m_1, m_2 ... , m_n, находящиеся на расстоянии r_1, r_2, ..., r_n от оси вращения. При вращении твёрдого тела относительно неподвижной оси отдельные его элементарные объёмы массами m_n опишут окружности различных радиусов r_n и будут иметь различные линейные скорости v_n. Но так как мы рассматриваем абсолютно твёрдое тело, то угловая скорость вращения этих объёмов одинакова:

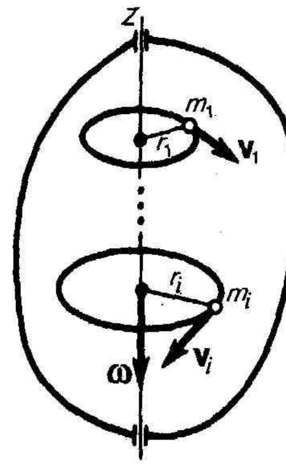


рис.4.3

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = ... = \frac{v_n}{r_n} \qquad (4.4)$$

Кинетическую энергию вращающегося тела найдем как сумму кинетических энергий его элементарных объемов:

$$T_{вр} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + ... + \frac{m_n v_n^2}{2},$$

или

$$T_{вр} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_n v_n^2}{2}.$$

Используя выражение (4.4), получим

$$T_{вр} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{J\omega^2}{2}$$

Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела

$$T_{вр} = J\omega^2 / 2\,. \qquad (4.5)$$

Из сравнения формулы (4.5) с выражением для кинетической энергии тела, движущегося поступательно $T = \frac{mv^2}{2}$, следует, что момент инерции J является мерой инертных свойств тела при вращательном движении. Чем больше момент инерции тела, тем большую энергию нужно затратить для достижения данной скорости. Формула (4.5) справедлива для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Для тела, катящегося по горизонтальной поверхности, энергия движения будет складываться из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где m — масса катящегося тела, v — скорость поступательного движения, J — момент инерции тела, ω — скорость вращательного движения.

§ 4.3 Уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела

Если тело, закреплённое на оси, приводится во вращение какой-либо силой, то кинетическая энергия вращения возрастает на величину затраченной работы. Работа зависит от действующей силы и от произведенного ею перемещения, однако выражение работы для смещения материальной точки при вращательном движении неприменимо, так как в данном случае перемещение угловое.

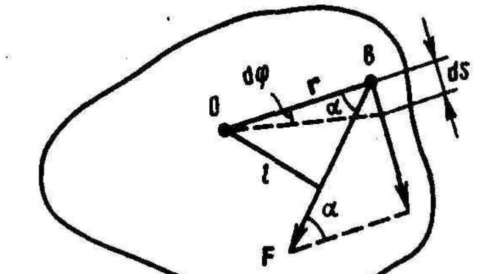


рис 4.4

Найдем выражение для работы при вращении тела (рис. 4.4). Пусть сила F приложена в точке A, находящейся от оси вращения на расстоянии r, α - угол между направлением силы и радиусом-вектором. Так как тело абсолютно твёрдое, то работа этой силы равна работе, затраченной на поворот всего тела. При повороте тела на малый угол $d\varphi$ точка приложения A проходит путь $ds = rd\varphi$ и работа равна произведению проекции силы на направление смещения на величину смещения:

$$dA = F\sin\alpha \cdot rd\varphi \qquad (4.6)$$

Величина
$$M = Fr\sin\alpha \qquad (4.7)$$

называется ***моментом силы относительно оси вращения***; $r\sin\alpha = l$ есть кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью вращения и называется ***плечом силы.*** ***Момент силы*** *равен произведению силы на ее плечо*:

$$M = Fl\ .$$

Момент силы — величина векторная. Так как $l = r\sin\alpha$, то момент силы равен векторному произведению $\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]$.

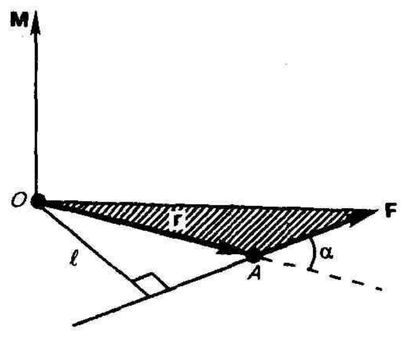


рис. 4.5

Направление момента силы перпендикулярно плоскости, в которой расположен вектор силы, и он определяется по правилу правого винта (рис. 4.5).

Подставляя (4.7) в (4.6), получим, что работа при вращении тела равна произведению момента действующей на тело силы на угол поворота тела:

$$dA = Md\varphi$$

Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:

$$dA = dT\ ,$$

но $dT = d(\frac{J\omega^2}{2}) = J\omega\, d\omega$

поэтому
$$Md\varphi = J\omega\, d\omega$$

или
$$M\frac{d\omega}{dt} = J\omega\frac{d\omega}{dt}$$

Учитывая, что $\omega = d\varphi/dt$, получим
$$M = J\frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon \qquad (4.8)$$

В векторной форме
$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}\ , \qquad (4.9)$$

т. е. момент силы, действующей на тело, равен произведению момента инерции тела на угловое ускорение.

Уравнение (4.9) представляет собой ***уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси***.

§ 4.4 Момент импульса и закон сохранения момента импульса

При сравнении законов вращательного и поступательного движений усматривается аналогия между ними. Разница в том, что при вращательном движении вместо силы основную роль играет ее момент, а роль массы выполняет момент инерции. Какая же величина будет аналогом импульса тела? Ею является момент импульса тела относительно оси вращения.

Моментом импульса L_i материальной точки массой m *называется произведение расстояния r от оси вращения до материальной точки на импульс $m_i v_i$ этой точки*:

$$L_i = m_i v_i r_i . \tag{4.10}$$

Момент импульса твёрдого тела относительно оси вращения *есть сумма моментов импульса всех материальных точек тела*:

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i$$

Так как для вращательного движения $v_i = \omega r_i$, то

$$L = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = J\omega$$

то есть

$$L = J\omega \tag{4.11}$$

Таким образом, ***момент импульса твердого тела относительно оси вращения*** *равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на его угловую скорость*.

Момент импульса твердого тела - это вектор, направленный по оси вращения так, чтобы видеть с его конца вращение, происходящим по часовой стрелке (рис. 4.6).

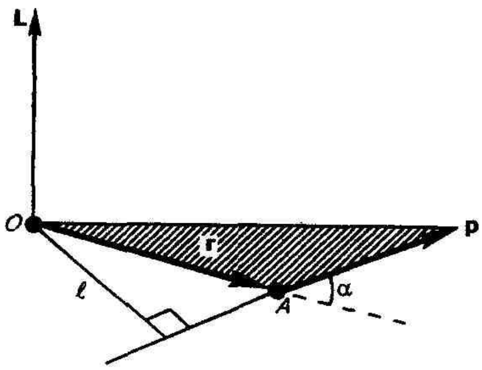


рис. 4.6

Продифференцируем уравнение (4.11) по времени:

$$\frac{dL}{dt} = J\frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M$$

или в векторной форме

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{4.12}$$

Уравнение (4.12) ещё одна форма записи ***основного уравнения динамики вращательного движения твёрдого тела относительно неподвижной оси***: *производная момента импульса твёрдого тела относительно оси вращения равна результирующему моменту всех сил, действующих на тело, относительно той же оси.*

Если мы имеем дело с замкнутой системой, то результирующий момент внешних сил $\vec{M} = 0$ и $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, или $\vec{L} = const$, то есть

$$J\vec{\omega} = const . \tag{4.13}$$

Выражение (4.13) представляет собой ***закон сохранения момента импульса***:
момент импульса замкнутой механической системы не изменяется с течением времени.

Закон сохранения момента импульса — фундаментальный закон природы. Сопоставим основные величины и уравнения, определяющие вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение, подчеркнув их аналогию (см. таблицу 4.2).

Таблица 4.2

Аналогия между поступательным и вращательным движениями

Поступательное движение		**Вращательное движение**	
масса	m	момент инерции	J
путь	s	угол поворота	φ
скорость	$v=\dfrac{ds}{dt}$	угловая скорость	$\omega=\dfrac{d\varphi}{dt}$
импульс	$p=mv$	момент импульса	$L=J\omega$
Ускорение	$a=\dfrac{dv}{dt}$	угловое ускорение	$\varepsilon=\dfrac{d\omega}{dt}$
Равнодействующая внешних сил $\vec{F}=\sum\vec{F}_i$		сумма моментов внешних сил $\vec{M}=\sum\vec{M}_i$	
основное уравнение динамики $F=ma=\dfrac{dp}{dt}$		основное уравнение динамики $M=J\varepsilon=\dfrac{dL}{dt}$	
работа	$F\,ds$	работа вращения	$Md\varphi$
кинетическая энергия	$\dfrac{mv^2}{2}$	кинетическая энергия вращения	$\dfrac{J\omega^2}{2}$

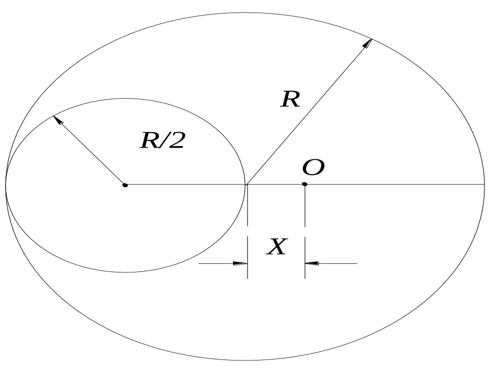
Вопросы для самопроверки

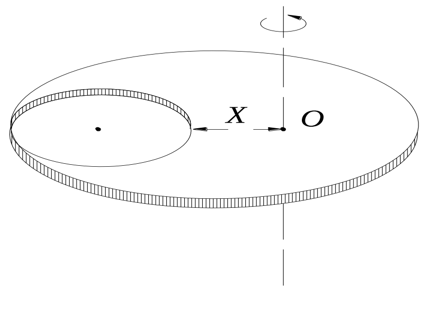
1. Собственные оси и собственные моменты инерции твёрдого тела. Собственные моменты инерции различных тел.
2. Теорема Штейнера.
3. Момент импульса и кинетическая энергия вращающегося твёрдого тела.
4. Кинетическая энергия тела при поступательном и вращательном движении.
5. Основной закон динамики вращательного движения. Момент импульса материальной точки и абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси вращения.
6. Закон сохранения момента импульса механической системы.

§ 4.5 Примеры решения задач

Пример 4.1 Однородный диск радиусом R = 20 см имеет круглый вырез, как показано на рисунке. Масса оставшейся части диска m = 7,3 кг. Найти момент инерции такого диска относительно оси, проходящей через его центр инерции и перпендикулярной к плоскости диска.

Решение:





Момент инерции вырезанного диска можно найти, зная момент инерции J_1 полного диска радиусом R и момент инерции J_2 малого диска радиусом $R/2$ (вырезанной части), по формуле:

$$J = J_1 - J_2 \tag{1}$$

Здесь J_1 и J_2 должны быть рассчитаны относительно оси, проходящей через центр инерции (точку 0). Поэтому сначала нужно найти положение центра инерции. Диск с вырезом можно получить, накладывая на сплошной диск радиуса R малый диск радиуса $R/2$ с «отрицательной» массой. Тогда равенство моментов сил тяжести запишется так:

$$m_1 g x = m_2 g\left(\frac{R}{2} + x\right) \tag{2}$$

где x – расстояние между центрами тяжести сплошного диска и диска с вырезом,
m_1- масса полного диска радиусом R, равная:

$$m_1 = \pi R^2 \rho h \tag{3}$$

и m_2 – масса вырезанной части (малый диск радиусом R/2)

$$m_2 = -\frac{\pi R^2 \rho h}{4} \tag{4}$$

где ρ – плотность вещества диска и h – толщина диска. Тогда масса диска с вырезом равна:

$$m = m_1 + m_2 = \pi R^2 \rho h - \frac{\pi R^2 \rho h}{4} = \frac{3\pi R^2 \rho h}{4} \tag{5}$$

Сравнивая (3), (4) и (5) выражаем массы m_1 и m_2 в единицах массы m:

$$m_1 = \frac{4m}{3} \quad \text{и} \quad m_2 = \frac{m}{3} \tag{6}$$

Подстановка (6) в (2) да\`т:

$$\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}\frac{R}{2} - \frac{1}{3}x = 0$$

или

$$x = \frac{R}{6}.$$

Таким образом центр тяжести вырезанного диска смещен на $x=R/6$ от центра сплошного диска. Теперь воспользуемся теоремой Штейнера и рассчитаем J_1 и J_2:

$$J_1 = \frac{m_1 R^2}{2} + \frac{mR^2}{36} = \frac{19mR^2}{27}.$$

Аналогично:

$$J_2 = \frac{m}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{R}{2} + \frac{R}{6}\right)^2 = \frac{1}{3}m\frac{R^2}{8} + \frac{1}{3}m\frac{4R^2}{9}$$

или

$$J_2 = \frac{41mR^2}{216}.$$

Подставим значения J_1 и J_2 в формулу (1) и найдем

$$J = mR^2\left(\frac{19}{27} - \frac{41}{216}\right) = \frac{37}{72}mR^2$$

Ответ: $J = 0.15\,кг \cdot м^2$.

Пример 4.2 Маховик в виде сплошного диска радиусом R = 0,2 м и массой m = 50 кг раскручен до частоты вращения n_1 = 480 мин $^{-1}$ и предоставлен самому себе. Под действием сил трения маховик остановился через t = 50 с. Найти момент сил трения.

Решение:

Для решения задачи воспользуемся уравнением динамики вращательного движения (в проекциях на ось вращения):

$$J\frac{d\omega}{dt} = M$$

где M – момент силы трения, действующей на маховик относительно оси вращения, совпадающей с геометрической осью маховика;

J – момент инерции маховика относительно этой же оси;

$d\omega$ – изменение угловой скорости вращения маховика за время dt.

Интегрируя это выражение получим: $M\Delta t = J\Delta\omega$

Так как маховик имеет форму диска, то его момент инерции равен: $J = \dfrac{mR^2}{2}$

Изменение угловой скорости можно записать в виде: $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi(n_2 - n_1)$,

где n_1 – начальная, а n_2 – конечная частоты вращения.

По условию задачи n_2 = 0.

Тогда: $$M = \frac{\pi m R^2 n_1}{\Delta t}.$$

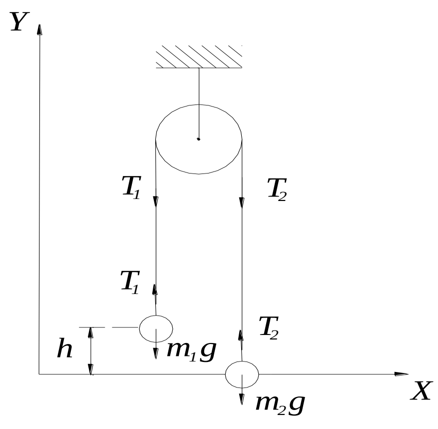
Подставляя численные значения в единицах СИ, находим: $M = \dfrac{3{,}14 \cdot 50(0,2)^2(-8)}{50} = -1 H \cdot м$

Знак минус показывает, что сила трения тормозит маховик, скорость вращения уменьшается.

Ответ: $M = \dfrac{\pi m R^2 n_1}{\Delta t} = -1 H \cdot м$.

Пример 4.3 Через блок, укрепл`нный на горизонтальной оси, проходящей через его центр, перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы m_1 = 300г и m_2 = 200г. Масса блока m_0 = 300г. Блок считать однородным диском. Найти ускорение грузов.

Решение:



Способ 1: поскольку нить не проскальзывает, то заданная система состоит из трех взаимодействующих тел: m_1, m_2 и m_0. На грузы m_1 и m_2 действуют силы тяжести $m_i g$ и натяжения T.

Введение натяжений «развязывает» грузы и позволяет записать уравнения движения для каждого тела. Для грузов m_1 и m_2, совершающих поступательное движение, эти уравнения имеют вид:

$$\vec{T}_1 + m_1\vec{g} = m\vec{a}_1 \tag{1}$$

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a} \tag{2}$$

где

$$\vec{a}_1 = -\vec{a}_2 = \vec{a} \tag{3}$$

Вращение блока происходит под действием моментов сил натяжений:

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \tag{4}$$

где $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_2$ - момент сил натяжений $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$; J – момент инерции диска равный $J=\dfrac{mr^2}{2}$,

$$\varepsilon=\frac{a}{r} \text{ - угловое ускорение } (r \text{ – радиус блока}). \tag{5}$$

Следует отметить, что векторы $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ и $\vec{\varepsilon}$ направлены вдоль оси вращения.

Для решения уравнений (1) – (4) запишем их в проекциях на ось Y. За положительное направление моментов сил $\vec{T}$ выберем направление угловой скорости $\vec{\omega}$ вращения блока:

$$T_1-m_1g=-m_1a \tag{6}$$

$$T_2-m_2g=m_2a \tag{7}$$

где

$$J\varepsilon=T_1r-T_2r \tag{8}$$

Система трех уравнений (6) – (8) содержит четыре неизвестных: a, ε, T_1, T_2. Для решения системы используем уравнение (5). Подобные уравнения называют уравнениями связи.

Решая эту систему относительно ускорения a, получим ответ задачи:

$$a=\frac{g(m_1-m_2)}{m_1+m_2+\dfrac{m_0}{2}}=1{,}5\ \frac{м}{с^2}$$

Способ 2. Воспользуемся теперь законом сохранения полной механической энергии. Из него следует, что изменение потенциальной энергии грузов m_1 и m_2 будет равно приросту кинетической энергии системы. Учитывая, что нить нерастяжима, следовательно, скорости грузов будут одинаковыми, тогда получим:

$$m_1gh=m_2gh+\frac{m_1v^2}{2}+\frac{m_2v^2}{2}+\frac{J\omega^2}{2}, \tag{9}$$

где h – высота, на которую опустился груз m_1 (поднялся груз m_2) за время движения t.

Потенциальная энергия груза m_1 переходит в потенциальную энергию груза m_2 и в кинетические энергии поступательного движения грузов m_1 и m_2 и кинетическую энергию вращения блока.

Поскольку $\omega=\dfrac{v}{r}$ и $J=\dfrac{m_0r^2}{2}$, то формула (9) примет вид:

$$gh(m_1-m_2)=\frac{m_1v^2}{2}+\frac{m_2v^2}{2}+\frac{m_0v^2}{4} \tag{10}$$

По определению ускорения: $a=\dfrac{dv}{dt}$. Дифференцируя уравнение (10) по времени и учитывая, что $\dfrac{dh}{dt}=v$ - скорость движения грузов, а $\dfrac{dv}{dt}=a$ - ускорение грузов, получаем:

$$\frac{dh}{dt}g(m_1-m_2)=\frac{m_1 2v}{2}\frac{dv}{dt}+\frac{m_2 2v}{2}\frac{dv}{dt}+\frac{m_0 2v}{4}\frac{dv}{dt}$$

или

$$vg(m_1-m_2)=m_1va+m_2va+\frac{m_0v}{2}a$$

Отсюда

$$a=\frac{d(m_1-m_2)}{m_1+m_2+\dfrac{m_0}{2}}=1{,}5\,\frac{м}{с^2}$$

Ответ: $a=1{,}5\dfrac{м}{с^2}$.

Пример 4.4 Платформа в виде диска радиусом R = 1,5 м и массой m_1 = 180 кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой n = 10 мин$^{-1}$. В центре платформы стоит человек массой m_2 = 60 кг. Какую линейную скорость относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Решение:

По закону сохранения момента импульса,

$$(J_1 + J_2)\,\omega = (J_1 + J'_2)\,\omega', \tag{1}$$

где J_1 — момент инерции платформы; J_2 — момент инерции человека, стоящего в центре платформы; ω — угловая скорость платформы с человеком, стоящим в ее центре; J'_2 — момент инерции человека, стоящего на краю платформы; ω' — угловая скорость платформы с человеком, стоящим на ее краю.

Линейная скорость человека, стоящего на краю платформы, связана с угловой скоростью вращения платформы соотношением

$$v = \omega' R \tag{2}$$

Определив ω' из уравнения (1) и подставив полученное выражение в формулу (2), будем иметь

$$v = \frac{(J_1 + J_2)\omega R}{J_1 + J'_2}. \tag{3}$$

Момент инерции платформы рассчитываем как для диска, следовательно, $J_1 = \frac{m_1 R^2}{2}$. Момент инерции человека рассчитываем как для материальной точки. Поэтому J_2 = 0, $J'_2 = m_2 R^2$. Угловая скорость платформы до перехода человека равна $\omega = 2\pi n$.

Заменив в формуле (3) величины J_1, J_2, J'_2 и ω их выражениями, получим

$$v = \frac{\frac{m_1 R^2}{2}}{\frac{m_1 R^2}{2} + m_2 R^2} 2\pi n R = \frac{m_1}{m_1 + 2m_2} 2\pi n R.$$

Сделав подстановку значений m_1, m_2, n, R и π, найдем линейную скорость человека:

$$v = \frac{180}{180 + 2\cdot 60}\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot\frac{10}{60}\cdot 1{,}5\ \text{м/с} = 0{,}942\ \text{м/с}.$$

Ответ: $v = 0{,}942$ м/с.

Пример 4.5 Человек стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается по инерции. Частота вращения n_1 = 0,5 с$^{-1}$. Момент инерции J_0 тела человека относительно оси вращения равен 1,6 кг·м^2. В вытянутых в стороны руках человек держит по гире массой m = 2 кг каждая. Расстояние между гирями l_1 = l,6 м. Определить частоту вращения n_2 скамьи с человеком, когда он опустит руки и расстояние l_2 между гирями станет равным 0,4 м. Моментом инерции скамьи пренебречь.

Решение:

Человек, держащий гири, составляет вместе со скамьей замкнутую механическую систему, поэтому момент импульса $J\omega$ этой системы должен иметь постоянное значение. Следовательно, для данного случая

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

где J_1 и ω_1 — момент инерции тела человека и угловая скорость скамьи и человека с вытянутыми руками; J_2 и ω_2 — момент инерции тела человека и угловая скорость скамьи и человека с опущенными руками. Отсюда

$$\omega_2 = (J_1/J_2)\omega_1.$$

Выразив в этом уравнении угловые скорости ω_1 и ω_2 через частоты вращения n_1 и n_2

($\omega = 2\pi n$) и сократив на 2π, получим

$$n_2 = (J_1/J_2)n_1. \qquad (1)$$

Момент инерции системы, рассматриваемой в данной задаче, равен сумме момента инерции тела человека J_0 и момента инерции гирь в руках человека. Так как размер гирь много меньше расстояния их от оси вращения, то момент инерции гирь можно определить по формуле момента инерции материальной точки: $J = mr^2$. Следовательно,

$$J_1 = J_0 + 2m(l_1/2)^2;\ J_2 = J_0 + 2m(l_2/2)^2,$$

где m — масса каждой из гирь; l_1 и l_2 — первоначальное и конечное расстояние между гирями. Подставив выражения J_1 и J_2 в уравнение (1), получим

$$n_2 = \frac{J_0 + 2m(l_1/2)^2}{J_0 + 2m(l_2/2)^2} n_1\ . \qquad (2)$$

Выполнив вычисления по формуле (2), найдем $n_2 = 1{,}18$ с$^{-1}$.

Ответ: $n_2 = 1{,}18$ с$^{-1}$.

Пример 4.6 Маховик в виде диска массой m = 50 кг и радиусом 20 см был раскручен до частоты вращения $n_1 = 480$ мин$^{-1}$ и затем предоставлен самому себе. Вследствие трения маховик остановился. Найти момент M сил трения, считая его постоянным для двух случаев: 1) маховик остановился через $t = 50$ с; 2) маховик до полной остановки сделал $N = 200$ оборотов.

Решение:

Случай 1. По закону изменение момента импульса вращающегося тела имеем:

$$M\,\Delta t = J\omega_2 - J\omega_1,$$

где J — момент инерции маховика; ω_1 и ω_2 — начальная и конечная угловые скорости. Так как $\omega_2 = 0$ и $\Delta t = t$, то $Mt = -J\,\omega_1$, откуда

$$M = -J\omega_1/t. \qquad (1)$$

Момент инерции диска относительно его геометрической оси равен $J = {}^1\!/_2 mr^2$. Подставив это выражение в формулу (1), найдем

$$M = -mr^2\omega_1/(2t). \qquad (2)$$

Выразив угловую скорость ω_1 через частоту вращения n_1 и произведя вычисления по формуле (2), найдем $M = -1$ Н·м.

Случай 2. В условии задачи дано число оборотов, сделанных маховиком до остановки, т. е. его угловое перемещение. Поэтому применим теорему о кинетической энергии для маховика, выражающую связь работы с изменением кинетической энергии:

$$A = J\omega_2^2/2 - J\omega_1^2/2,$$

или, учтя, что $\omega_2 = 0$,

$$A = -J\omega_1^2/2. \qquad (3)$$

Работа при вращательном движении определяется по формуле $A = M\varphi$. Подставив выражения работы и момента инерции диска в формулу (3), получим

$$M\varphi = -mr^2\omega_1^2/4.$$

Отсюда момент силы трения

$$M = -mr^2\omega_1^2/(4\varphi). \qquad (4)$$

Угол поворота $\varphi = 2N = 2\cdot 3{,}14\cdot 200$ рад = 1256 рад. Произведя вычисления по формуле (4), получим $M = -1$ Н·м.

Знак минус показывает, что момент силы трения оказывает тормозящее действие.

Ответ: $M_1 = -1$ Н·м; $M_2 = -1$ Н·м.

Пример 4.7 Стержень длиной l = 1,5 м и массой M = 10 кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня (см. рис. 1). В середину стержня ударяет пуля массой m = 10 г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью υ_0 =500 м/с, и застревает в стержне. На какой угол φ отклонится стержень после удара?

Решение:

Удар пули следует рассматривать как неупругий, так как после удара и пуля, и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковыми скоростями.

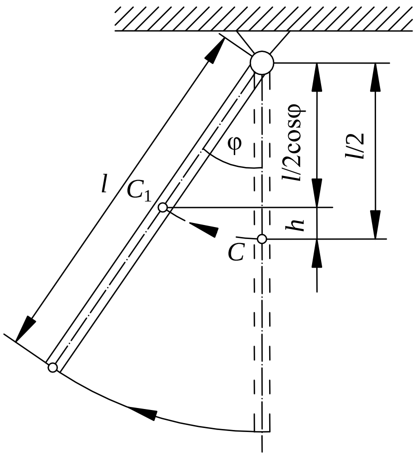


Рис. 1

Рассмотрим подробнее явления, происходящие при ударе. Сначала пуля, ударившись о стержень, за ничтожно малый промежуток времени приводит его в движение с угловой скоростью со и сообщает ему кинетическую энергию

$$T = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (1)$$

где J — момент инерции стержня относительно оси вращения.

Затем стержень поворачивается на искомый угол φ, причем центр масс его поднимается на высоту $h = (l/2)(1 - \cos\varphi)$.

В отклоненном положении стержень будет обладать потенциальной энергией $\Pi = Mg(l/2)(1 - \cos\varphi)$. (2)

Потенциальная энергия получена за счет кинетической энергии и равна ей по закону сохранения энергии. Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим

$$Mg(l/2)(1 - \cos\varphi) = J\omega^2/2.$$

Отсюда $$\cos\varphi = 1 - J\omega^2/(Mgl).$$

Подставив в эту формулу выражение для момента инерции стержня $J = Ml^2/3$, получим

$$\cos\varphi = 1 - l\omega^2/(3g). \qquad (3)$$

Чтобы из выражения (3) найти φ, необходимо предварительно определить значение ω. В момент удара па пулю и на стержень действуют силы тяжести, линии действия которых проходят через ось вращения и направлены вертикально вниз. Моменты этих сил относительно оси вращения равны пулю. Поэтому при ударе нули о стержень будет справедлив закон сохранения момента импульса.

В начальный момент удара угловая скорость стержня $\omega_0 = 0$, поэтому его момент импульса $L_{01} = J\omega_0 = 0$. Пуля коснулась стержня и начала углубляться в стержень, сообщая ему угловое ускорение и участвуя во вращении стержня около оси. Начальный момент импульса пули $L_{02} = m\upsilon_0 r$, где r — расстояние точки попадания от оси вращения. В конечный момент удара стержень имел угловую скорость ω, а пуля — линейную скорость υ, равную линейной скорости точек стержня, находящихся на расстоянии r от оси вращения. Так как $\upsilon = \omega r$, то конечный момент импульса пули $L_2 = m\upsilon r = mr^2\omega$.

Применив закон сохранения момента импульса, можем написать

$$L_{01} + L_{02} = L_1 + L_2, \text{ или } m\upsilon_0 r = J\omega + mr^2\omega.$$

Откуда $$\omega = \frac{m\upsilon_0 r}{J + mr^2}, \qquad (4)$$

где $J = Ml^2/3$ — момент инерции системы стержень — пуля.

Если учесть, что в (4) $mr^2 \ll J = Ml^2/3$, а также что $r = l/2$, то после несложных преобразований получим $$\omega = \frac{3m\upsilon_0}{2Ml}. \qquad (5)$$

Подставив числовые значения величин в (5), найдем

$$\omega = \frac{3\cdot 10^{-2}\cdot 500}{2\cdot 10\cdot 1{,}5}\ рад\ = 0{,}5\ рад.$$

По (3) получим $\cos\varphi = 1 - 1{,}5(0{,}5)^2/(3\cdot 9{,}81) = 0{,}987.$

Следовательно, φ = 9°20'.

Ответ: φ = 9°20'.

Пример 4.8 Вал в виде сплошного цилиндра массой $m_1 = 10$ кг насажен на горизонтальную ось. На цилиндр намотан шнур, к свободному концу которого подвешена гиря массой m_2 = 2 кг (см. рис.). С каким ускорением a будет опускаться гиря, если ее предоставить самой себе?

Решение:

Линейное ускорение a гири равно тангенциальному ускорению точек вала, лежащих на его цилиндрической поверхности, и связано с угловым ускорением вала соотношением

$$a = \varepsilon r, \qquad (1)$$

где r — радиус вала.

Угловое ускорение вала выражается основным уравнением динамики вращающегося тела:

$$\varepsilon = M/J, \qquad (2)$$

где M — результирующий вращательный момент сил, действующий на вал; J — момент инерции вала. Рассматриваем вал как однородный цилиндр. Тогда его момент инерции относительно геометрической оси равен

$$J = {}^1\!/_2 m_1 r^2.$$

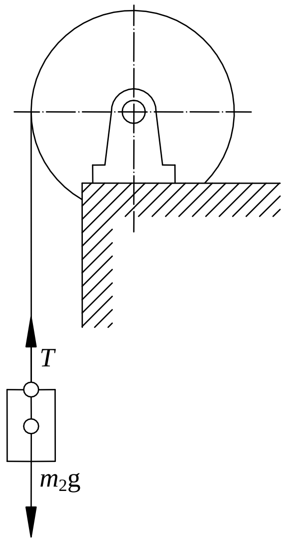


Рис. 1

Вращающий момент M, действующий на вал, равен произведению силы натяжения T шнура на радиус вала: $M = Tr$.

Силу натяжения шнура найдем из следующих соображений. На гирю действуют две силы: сила тяжести m_2g, направленная вниз, и сила натяжения T шнура, направленная вверх. Равнодействующая этих сил вызывает равноускоренное движение гири. По второму закону Ньютона, $m_2 g - T = m_2 a$, откуда $T = m_2(g - a)$. Таким образом, вращающий момент $M = m_2(g - a)r$.

Подставив в формулу (2) полученные выражения M и J, найдем угловое ускорение вала:

$$\varepsilon = \frac{m_2(g-a)r}{{}^1\!/_2 m_1 r^2} = \frac{2m_2(g-a)}{m_1 r}.$$

Для определения линейного ускорения гири подставим это выражение ε в формулу (1). Получим $a = \dfrac{2m_2(g-a)}{m_1}$, откуда $a = \dfrac{2m_2}{m_1 + 2m_2} g = 2.80\ м/с^2$.

Ответ: $a = 2.80\ м/с^2$.

Пример 4.9 Физический маятник представляет собой стержень длиной l = 1 м и массой m_1 =1 кг с прикрепленным к одному из его концов диском массой $m_2 = 0{,}5\ m_1$. Определить момент инерции J_z такого маятника относительно оси Oz, проходящей через точку O на стержне перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 1).

Решение:

Общий момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня J_{z1} и диска J_{z2}:

$$J_z = J_{z1} + J_{z2}. \qquad (1)$$

Формулы, по которым вычисляются моменты инерции стержня J_1 и диска J_2 относительно осей, проходящих через их центры масс, даны в табл. 4.1. Чтобы определить моменты инерции J_{z1} и J_{z2}, надо воспользоваться теоремой Штейнера:

$$J = J_C + ma^2. \qquad (2)$$

Выразим момент инерции стержня согласно формуле (2):

$$J_{z1} = {}^1\!/_{12} m_1 l^2 + m_1 a_1^2.$$

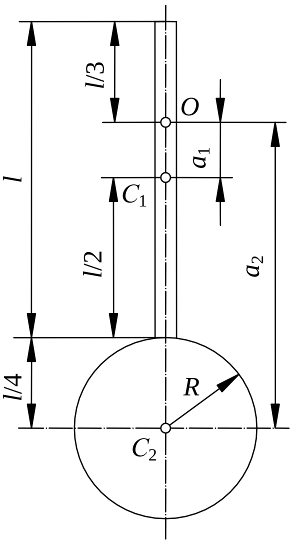


Рис. 1.

Расстояние a_1 между осью Oz и параллельной ей осью, проходящей через центр масс C_1 стержня, как следует из рис. 1, равно $\frac{1}{2}l - \frac{1}{3}l = \frac{1}{6}l$. С учетом этого запишем

$$J_{z1} = \frac{1}{12}m_1l^2 + m_1(\frac{1}{6}l)^2 = \frac{1}{9}m_1l^2 = 0{,}11m_1l^2.$$

Момент инерции диска в соответствии с формулой (2) равен

$$J_{z2} = \frac{1}{2}m_2R^2 + m_2a_2^2,$$

где R — радиус диска; $R = \frac{1}{4}l$. Расстояние a_2 между осью Oz и параллельной ей осью, проходящей через центр масс диска, равно (см. рис. 1) $\frac{2}{3}l + \frac{1}{4}l = \frac{11}{12}l$. С учетом этого запишем

$$J_{z2} = \frac{1}{2}m_2(\frac{1}{4}l)^2 + m_2(\frac{11}{12}l)^2 = 0{,}0312m_2l^2 + 0{,}840m_2l^2 = 0{,}871\ m_2l^2.$$

Подставив полученные выражения J_{z1} и J_{z2} в формулу (1), найдем

$$J_z = 0{,}111m_1l^2 + 0{,}871m_2l^2 = (0{,}111m_1 + 0{,}871m_2)l^2,$$

или, учитывая, что $m_2 = 0{,}5m_1$,

$$J_z = 0{,}547m_1l^2.$$

Произведя вычисления, получим значение момента инерции физического маятника относительно оси Oz:

$$J_z = 0{,}547\cdot1\cdot1\ \text{кг}\cdot\text{м}^3 = 0{,}547\ \text{кг}\cdot\text{м}^3.$$

Ответ: $J_z = 0{,}547$ кг·м^3.

Пример 4.10 Через блок в виде диска, имеющий массу m = 80 г, перекинута тонкая гибкая нить, к концам которой подвешены грузы массами m_1 = 100 г и m_2 = 200 г (рис. 1). С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением пренебречь.

Решение:

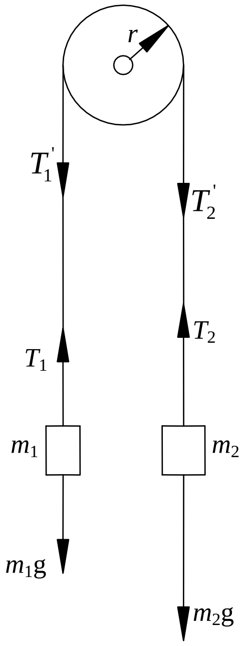


рис. 1.

Применим к решению задачи основные законы поступательного и вращательного движения. На каждый из движущихся грузов действуют две силы: сила тяжести mg, направленная вниз, и сила T натяжения нити, направленная вверх.

Так как вектор ускорения a груза m_1 направлен вверх, то $T_1 > m_1$g. Равнодействующая этих сил вызывает равноускоренное движение и, по второму закону Ньютона, равна $T_1 - m_1g = m_1a$, откуда

$$T_1 = m_1g + m_1a. \qquad (1)$$

Вектор ускорения a груза m_2 направлен вниз; следовательно, $T_2 < m_2$g. Запишем формулу второго закона для этого груза: $m_2g - T_2 = m_2a$, откуда

$$T_2 = m_2\text{g} - m_2a. \qquad (2)$$

Согласно основному закону динамики вращательного движения, вращающий момент M, приложенный к диску, равен произведению момента инерции J диска на его угловое ускорение ε:

$$M = J\varepsilon. \qquad (3)$$

Определим вращающий момент. Силы натяжения нитей действуют не только на грузы, но и на диск. По третьему закону Ньютона, силы T_1' и T_2', приложенные к ободу диска, равны соответственно силам T_1 и T_2, но по направлению им противоположны. При движении грузов диск ускоренно вращается по часовой стрелке; следовательно, $T_2' > T_1'$. Вращающий момент, приложенный к диску, равен произведению разности этих сил на плечо, равное радиусу диска, т. е. $M = (T_2' - T_1')r$. Момент инерции диска $J = mr^2/2$, угловое ускорение связано с линейным ускорением грузов соотношением $\varepsilon = a/r$. Подставив в формулу (3) выражения M, J и ε, получим

$$(T_2' - T_1')r = \frac{mr^2}{2}\frac{a}{r},$$

откуда

$$T_2' - T_1' = \frac{ma}{2}.$$

Так как $T_1' = T_1$ и $T_2' = T_2$, то можно заменить силы T_1' и T_2' выражениями по формулам (1) и (2), тогда $m_2 g - m_2 a - m_1 g - m_1 a = \frac{m}{2} a$ или $m_2 - m_1\ \ g = \left(m_2 + m_1 + \frac{m}{2} \right) a$.

Откуда
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{m}{2}} g\ . \qquad (4)$$

Отношение масс в правой части формулы (4) есть величина безразмерная. Поэтому значения масс m_1, m_2 и m можно выразить в граммах, как они даны в условии задачи. После подстановки получим
$$a = \frac{0{,}2 - 0{,}1}{0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}04} 9{,}81\ м/c^2 = 2.88\ \ м/c^2\ .$$

Ответ: $a = 2.88\ \ м/c^2$.

Пример 4.11 Вычислить момент инерции J_z молекулы NO_2 относительно оси z, проходящей через центр масс молекулы перпендикулярно плоскости, содержащей ядра атомов. Межъядерное расстояние d этой молекулы равно 0,118 нм, валентный угол α = 140º.

Решение:

Молекулу NO_2 можно рассматривать как систему, состоящую из трех материальных точек общей массой
$$m = 2m_1 + m_2, \qquad (1)$$
где m_1 — масса атома кислорода; m_2 — масса атома азота.

Расположим молекулу относительно координатных осей так, как это указано на рис. 1 (начало координат совместим с центром масс C молекулы, ось z направим перпендикулярно плоскости чертежа «к нам».)

Для определения J_z воспользуемся теоремой Штеинера:
$$J = J_C + ma^2.$$

Для данного случая эта теорема запишется в виде $J_{z'} = J_z + ma^2$, где $J_{z'}$ – момент инерции относительно оси z', параллельной оси z и проходящей через атом азота (точка O на рис. 1). Отсюда искомый момент инерции
$$J_z = J_{z'} - ma^2. \qquad (2)$$

Момент инерции $J_{z'}$ находим как сумму моментов инерции двух материальных точек (атомов кислорода):
$$J_{z'} = 2m_1 d^2. \qquad (3)$$

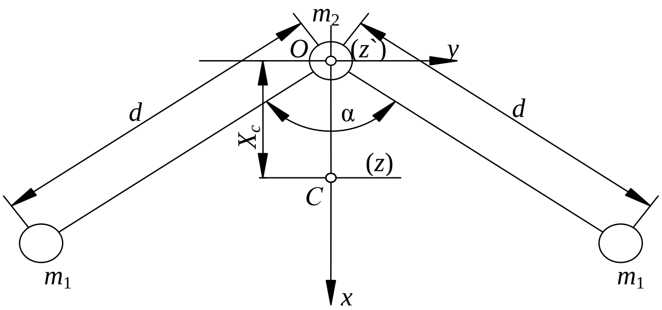


Рис. 1

Расстояние a между осями z и z' равно координате x_c центра масс системы и поэтому может быть выражено по формуле $x_c = \sum m_i x_i / \sum m_i$. В данном случае
$$a = x_c = (2m_1 x_1 + m_2 x_2)/(2m_1 + m_2),$$
или, учитывая, что $x_1 = d \cos(\alpha/2)$ и $x_2 = 0$,
$$a = x_c = \frac{2m_1}{2m_1 + m_2} d \cos\frac{\alpha}{2}\ . \qquad (4)$$

Подставив в формулу (2) значения $J_{z'}$, m, a соответственно из выражений (3), (1), (4), получим
$$J_z = 2m_1 d^2 - \ 2m_1 + m_2\ \left(\frac{2m_1}{2m_1 + m_2} \right)^2 d^2 \cos^2\frac{\alpha}{2},$$
или после преобразований
$$J_z = 2m_1 d^2 \left(1 - \frac{2m_1}{2m_1 + m_2} \cos^2\frac{\alpha}{2} \right). \qquad (5)$$

Относительные атомные массы кислорода (A_O = 16) и азота (A_N = 14). Запишем массы атомов этих элементов в атомных единицах массы (а.е.м.), а затем выразим в килограммах (1 а.е.м. = $1{,}66\cdot10^{-27}$ кг, см.):

$$m_1 = 16\cdot1{,}66\cdot10^{-27}\text{ кг} = 2{,}66\cdot10^{-26}\text{ кг};$$
$$m_2 = 14\cdot1{,}66\cdot10^{-27}\text{ кг} = 2{,}32\cdot10^{-26}\text{ кг}.$$

Значения m_1, m_2, d и; α подставим в формулу (5) и произведем вычисления:

$$J_z = 6{,}80\cdot10^{-46}\text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Ответ: $J_z = 6{,}80\cdot10^{-46}$ кг·м^2**.**

Задачи для самостоятельной работы

Задача 4.1 На горизонтальную ось насажены маховик и легкий шкив радиусом $R = 5$ см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой m = 0,4 кг. Опускаясь равноускоренно, груз прошел путь 1,8 м за время t = 3 с, Определить момент инерции J маховика. Массу шкива считать пренебрежимо малой. ***Ответ:*** $I = 0.024\,кг\cdot м^2$

Задача 4.2 Вал массой m = 100 кг и радиусом $R = 5$ см вращался с частотой n = 8 с$^{-1}$. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой F = 40 Н, под действием которой вал остановился через t = 10 с. Определить коэффициент трения.
Ответ: $\mu = 0.31$.

Задача 4.3 Через неподвижный блок массой 0,2 кг перекинут шнур, к концам которого подвешены грузы массами m_1= 0,3 кг и m_2 = 0,5 кг. Определить силы натяжения шнура T_1 и T_2 по обе стороны блока во время движения грузов, если массу блока можно считать равномерно распределенной по ободу**.** ***Ответ:*** $T_1 = 3.53\,Н$; $T_2 = 3.92\,Н$.

Задача 4.4 Тонкий однородный стержень длиной l = 50 см и массой m = 400 г вращается с угловым ускорением ε = 3 рад/с^2 около оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определить вращающий момент M. ***Ответ:*** $M = 0.025\,Н\cdot м$.

Задача 4.5 Сплошной цилиндр массой 4 кг катится бес скольжения по горизонтальной поверхности. Линейная скорость оси цилиндра равна 1 м/с. Определите полную кинетическую энергию цилиндра. ***Ответ:*** $T = 3\,Дж$.

Задача 4.6 Два маленьких шарика массой m = 10 г каждый скреплены тонким невесомым стержнем длиной l = 20 см. Определить момент инерции J системы относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через центр масс. ***Ответ:*** $I = 2\cdot10^{-4}\,кг\cdot м^2$.

Задача 4.7 Определить момент инерции J тонкого однородного стержня длиной l=60 см и массой m=100 г относительно оси, перпендикулярной ему и проходящей через точку стержня, удаленную на a=20 см от одного из его концов. ***Ответ:*** $I = 4\cdot10^{-3}\,кг\cdot м^2$

Задача 4.8 Шарик массой 100 г, привязанный к концу нити длиной l_1=l м, вращается, опираясь на горизонтальную плоскость, с частотой n_1=1 с$^{-1}$. Нить укорачивается и шарик приближается к оси вращения до расстояния l_2=0,5 м. С какой частотой n_2 будет при этом вращаться шарик? Какую работу A совершит внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь. ***Ответ:*** $n_2 = 4\frac{об}{с}$**;** $A = 5.9\,Дж$.

Задача 4.9 На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом 2 м, стоит человек. Масса платформы М = 200 кг, масса человека 80 кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Пренебрегая трением, найти, с какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью v = 2 м/с относительно платформы. ***Ответ:*** $\omega = 0.4\frac{рад}{с}$.

Задача 4.10 Пуля массой 10 г летит со скоростью 800 м/с, вращаясь около продольной оси с частотой 3000 с$^{-1}$. Принимая пулю за цилиндрик диаметром 8 мм, определить полную кинетическую энергию Т пули. ***Ответ:*** $T = 3Дж$ **.**