

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1-4: ИЗУЧЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Студент _____ группа: _____

Допуск _____ Выполнение _____ Защита _____

Цель работы: ознакомление с методом измерения момента инерции твёрдого тела; экспериментальное определение собственных моментов инерции твёрдого тела.

Приборы и принадлежности: крутильный маятник ГРМ-05; исследуемое тело.

Описание установки

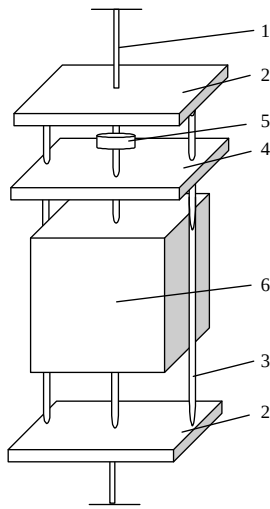


рис. 1

схема установки

Принципиальная схема установки представлена на рисунке 1.

- 1 - упругий подвес с рамкой, на котором закрепляется исследуемое тело;
- 2, 3 - рама, совершающая крутильные колебания на упругом подвесе;
- 4 - прижимная планка, перемещаемая по направляющим 3 рамы;
- 5 - зажимной винт;
- 6 - исследуемый объект.

Работа выполняется на крутильном маятнике, конструкция которого позволяет изменять ориентацию твёрдого тела, совершающего колебания относительно неподвижной оси.

Основная цель данной работы состоит в проверке следующего соотношения:

$$I_0 = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma, \quad (1)$$

где I_0 - момент инерции тела относительно произвольной собственной оси,

I_x , I_y и I_z - момент инерции тела относительно главных осей инерции тела,

α , β и γ - углы между произвольной собственной осью инерции тела и его главных осей инерции (см. рис. 2).

Возможность проверки этого соотношения вытекает из закона крутильных колебаний, связывающего период колебаний маятника T с его моментом инерции I_0 относительно собственной оси колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}}, \quad (2)$$

где ω - циклическая частота колебаний, f - модуль кручения упругого подвеса.

С учётом уравнения (1) можно записать:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma}{f}} \quad (3)$$

Возводя обе части равенства (3) в квадрат, получим:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{f} (I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma)$$

или, раскрыв скобки,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{f} I_x \cos^2 \alpha + \frac{4\pi^2}{f} I_y \cos^2 \beta + \frac{4\pi^2}{f} I_z \cos^2 \gamma = T_x^2 \cos^2 \alpha + T_y^2 \cos^2 \beta + T_z^2 \cos^2 \gamma.$$

Окончательно можно записать:

$$T^2 = T_x^2 \cos^2 \alpha + T_y^2 \cos^2 \beta + T_z^2 \cos^2 \gamma. \quad (4)$$

Здесь T - период колебаний маятника относительно оси, образующей углы α , β , γ с главными осями инерции тела x , y , z ; T_x , T_y , T_z - периоды крутильных колебаний относительно главных осей инерции тела x , y , z .

Таким образом, для проверки соотношения (1) достаточно проверить справедливость уравнения (4). В этом и состоит цель данной лабораторной работы.

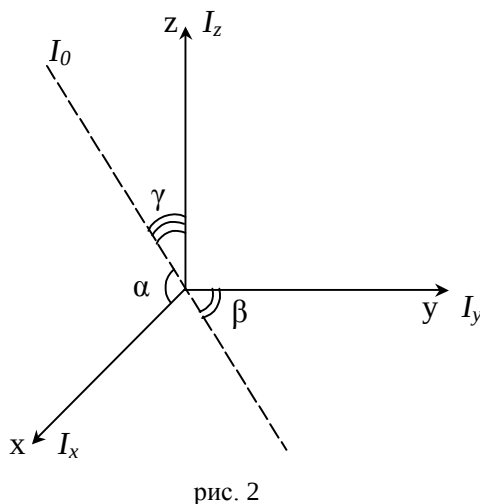


рис. 2

Конструкция маятника (см. рис. 1) позволяет устанавливать изучаемый объект в нескольких положениях относительно оси упругого подвеса. Установив объект так, чтобы его главная ось инерции (например, x) совпала с осью маятника, можно измерить T_x . Таким образом можно измерить все периоды колебаний, входящие в формулу (4). При определении периода колебания маятника следует учесть, что система закрепления объекта обладает собственным моментом инерции I_c , который в силу аддитивности момента инерции складывается с моментом инерции исследуемого тела.

С учётом этого можно записать:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{f} (I_c + I_T) = T_c^2 + T_T^2,$$

где T_c - период колебаний подвеса без объекта; T - период колебаний подвеса с объектом, а T_T - период колебаний, обусловленный только моментом инерции объекта. **Проверяемое соотношение (4) справедливо только для периодов T_T .**

Определение $\cos^2 \alpha$, $\cos^2 \beta$, $\cos^2 \gamma$ производится с помощью измерений геометрии объекта (см. рис. 2).

x, y, z - главные оси инерции параллелепипеда, со сторонами

a (вдоль x), b (вдоль y), c (вдоль z); 1, 2, 3, 4 – неглавные свободные оси инерции.

Главные оси инерции x, y, z параллелепипеда проходят через центры противоположных граней. Обозначим через a, b, c длины рёбер параллелепипеда, параллельные осям x, y, z .

Тогда ось 1-1, проходящая через вершины параллелепипеда, образует углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ с осями x, y, z и

$$\cos^2 \alpha_1 = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \cos^2 \beta_1 = \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \cos^2 \gamma_1 = \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}; \quad (5)$$

ось 2-2, проходящая через середины ребер c , имеет углы $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ и

$$\cos^2 \alpha_2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2}; \quad \cos^2 \beta_2 = \frac{b^2}{a^2 + b^2}; \quad \cos^2 \gamma_2 = 0; \quad (6)$$

ось 3-3, проходящая через середины ребер b , имеет углы $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ и

$$\cos^2 \alpha_3 = \frac{a^2}{a^2 + c^2}; \quad \cos^2 \beta_3 = 0; \quad \cos^2 \gamma_3 = \frac{c^2}{a^2 + c^2}; \quad (7)$$

ось 4-4, проходящая через середины ребер a , имеет углы $\alpha_4, \beta_4, \gamma_4$ и

$$\cos^2 \alpha_4 = 0; \quad \cos^2 \beta_4 = \frac{b^2}{b^2 + c^2}; \quad \cos^2 \gamma_4 = \frac{c^2}{b^2 + c^2}. \quad (8)$$

Выполнение лабораторной работы заключается в проверке соотношения (4) для направлений, заданных осями 1-1, 2-2, 3-3 и 4-4 одного из трех параллелепипедов различных размеров (см. таблицу 2).

Таблица 2

	a , мм	b , мм	c , мм
1	50	50	50
2	50	50	100
3	40	60	100

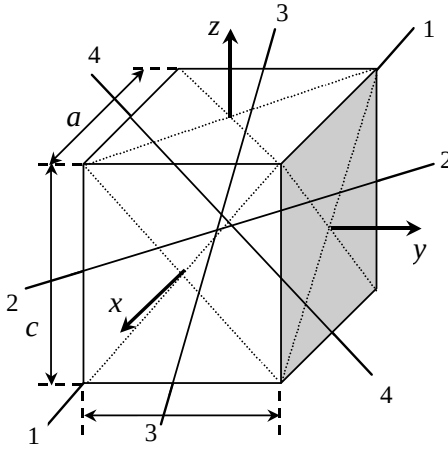


рис. 2

Порядок выполнения работы

Упражнение 1. Определение периода колебаний подвеса без объекта T_c

1. Включите питание установки, нажав кнопку "СЕТЬ".
2. Установите электромагнит, фиксирующий положение подвеса, на угол $10 - 15^\circ$.
3. Очистите счетчики числа периодов и времени колебаний с помощью кнопки "СБРОС".
4. Отклоните подвес до соприкосновения с электромагнитом (должна произойти фиксация подвеса с электромагнитом).
5. Нажмите кнопку "ПУСК" (начнется колебательное движение подвеса с подсчетом числа периодов колебаний и времени движения).
6. Определите время 10 полных колебаний подвеса. Для этого, при достижении количества периодов колебаний равного 9 нажмите кнопку "СТОП". Произойдет отсчет ещё одного периода колебаний и секундомер остановится.
7. Вычислите период колебаний подвеса без объекта по формуле:

$$T_c = \frac{t}{N}, \quad \text{где } t - \text{время 10 полных колебаний, а } N = 10 - \text{число полных колебаний.}$$

Упражнение 2. Определение периодов колебаний объекта относительно его главных осей x, y, z

1. Закрепите исследуемый объект вдоль главной оси x (см. рис. 2) с помощью винта 5.
2. Очистите счётчики числа периодов и времени колебаний с помощью кнопки "СБРОС".
3. Отклоните подвес до соприкосновения с электромагнитом (должна произойти фиксация подвеса с электромагнитом).
4. Нажмите кнопку "ПУСК".
5. Определите время 10 полных колебаний объекта с подвесом.
6. Вычислите период колебаний объекта с подвесом T_{II} по формуле:

$$T_{II} = \frac{t}{N}, \quad \text{где } t - \text{время 10 полных колебаний, а } N = 10 - \text{число полных колебаний.}$$

7. Определите период колебаний, обусловленный только объектом, по формуле: $T_{изм} = \sqrt{T_{II}^2 - T_c^2}$.
8. Аналогичные измерения и расчёты проведите для двух других главных осей инерции тела y и z .
Результаты вычислений занесите в таблицу 1.
9. Среднеквадратичное отклонение периода колебаний маятника $S_{изм}$ определите как приборную погрешность (она равна половине единицы цены деления шкалы миллисекундомера).

Упражнение 3. Определение периодов колебаний объекта относительно осей 1-1, 2-2, 3-3 и 4-4 экспериментальным путём

1. Закрепите исследуемый объект вдоль оси 1-1 (см. рис. 2) с помощью винта 5.
2. Очистите счетчики числа периодов и времени колебаний с помощью кнопки "СБРОС".
3. Отклоните подвес до соприкосновения с электромагнитом (должна произойти фиксация подвеса с электромагнитом).
4. Нажмите кнопку "ПУСК".
5. Определите время 10 полных колебаний объекта с подвесом.
6. Вычислите период колебаний объекта с подвесом T_{II} по формуле:

$$T_{II} = \frac{t}{N},$$

где t - время 10 полных колебаний, а $N = 10$ - число полных колебаний.

7. Определите период колебаний, обусловленный только объектом, по формуле:

$$T_{изм} = \sqrt{T_{II}^2 - T_c^2}.$$

8. Аналогичные измерения и расчёты проведите для тех других осей инерции тела 2-2, 3-3 и 4-4.
Результаты вычислений занесите в таблицу 1.
9. Среднеквадратичное отклонение периодов колебаний маятника $S_{изм}$ определите как приборную погрешность (она равна половине единицы цены деления шкалы миллисекундомера).

Упражнение 4. Вычисление периодов колебаний объекта относительно осей 1-1, 2-2, 3-3 и 4-4 по формуле (4)

1. По формулам (5) – (8) рассчитайте квадраты косинусов и результаты занесите в таблицу 2.

2. По формуле

$$T = \sqrt{T_x^2 \cos^2 \alpha + T_y^2 \cos^2 \beta + T_z^2 \cos^2 \gamma}$$

(где T_x, T_y, T_z - это периоды колебаний объекта относительно главных осей x, y, z , найденные в упражнении 2) рассчитайте периоды колебаний объекта относительно осей 1-1, 2-2, 3-3 и 4-4. Результаты вычислений занесите в таблицу 1.

3. Погрешности вычислений периодов колебаний исследуемого объекта относительно различных осей определите по

формуле:

$$S_{\text{выч}} = T_{\text{выч}} \sqrt{\left(\frac{S_T}{T}\right)^2 + \left(2 \frac{S_l}{l}\right)^2},$$

где $\frac{S_T}{T} = 5 \cdot 10^{-4}$ - относительная погрешность в определении времени, а $\frac{S_l}{l} = 5 \cdot 10^{-2}$ - относительная погрешность в определении длины ребра параллелепипеда.

4. Окончательные ответы запишите в виде:

$$T_{\text{изм}}^{1-1} = T_{1-1} \pm S_{\text{изм}}$$

$$T_{\text{выч}}^{1-1} = T_{1-1} \pm S_{\text{выч}},$$

$$T_{\text{изм}}^{2-2} = T_{2-2} \pm S_{\text{изм}}$$

$$T_{\text{выч}}^{2-2} = T_{2-2} \pm S_{\text{выч}},$$

$$T_{\text{изм}}^{3-3} = T_{3-3} \pm S_{\text{изм}}$$

$$T_{\text{выч}}^{3-3} = T_{3-3} \pm S_{\text{выч}},$$

$$T_{\text{изм}}^{4-4} = T_{4-4} \pm S_{\text{изм}}$$

$$T_{\text{выч}}^{4-4} = T_{4-4} \pm S_{\text{выч}}$$

5. Проведите анализ измеренных и вычисленных результатов и сделайте соответствующий вывод о справедливости уравнений (1) и (4).

Таблица 1

Ось	$\cos^2 \alpha$	$\cos^2 \beta$	$\cos^2 \gamma$	$T_{\text{изм}},$ с	$S_{\text{изм}},$ с	$T_{\text{выч}},$ с	$S_{\text{выч}},$ с
x	1	0	0				
y	0	1	0				
z	0	0	1				
1-1							
2-2							
3-3							
4-4							

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

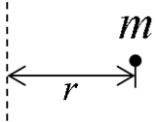
1. Дайте определение момента инерции материальной точки, системы материальных точек и абсолютно твёрдого тела. Объясните физический смысл момента инерции I .
2. Что такое главные оси и главные моменты инерции тела? Каковы их свойства?
3. Сформулируйте и запишите теорему Штейнера.
4. Как определить результирующий момент сил M_z , кинетическую энергию E_{Kz} и момент импульса L_z твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси вращения Z ?
5. Запишите формулы для определения собственных моментов инерции некоторых тел массой m .
6. Сформулируйте и запишите основное уравнение динамики вращательного движения абсолютно твёрдого тела

Ответы на контрольные вопросы

1.. Дайте определение момента инерции материальной точки, системы материальных точек и абсолютно твёрдого тела. Объясните физический смысл момента инерции I

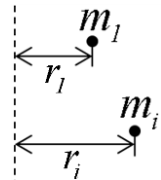
Наблюдения показывают, что при рассмотрении вращательного движения тела его инертные свойства определяются не только массой этого тела, но и её распределением относительно оси вращения. Поэтому основной характеристикой инертных свойств тела при вращательном движении является величина, которая называется **моментом инерции тела I** .

Моментом инерции материальной точки относительно оси вращения Z называется скалярная величина I (и), равная произведению массы материальной точки m на квадрат кратчайшего расстояния r^2 от оси вращения Z до рассматриваемой материальной точки:



$$I = mr^2. \quad (1)$$

$[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$, килограмм-метр в квадрате.



Моментом инерции системы материальных точек относительно оси вращения Z называется скалярная величина I_z , равная сумме произведений масс m_i материальных точек системы на квадраты кратчайших расстояний r_i^2 от оси вращения Z до рассматриваемых материальных точек системы:

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2. \quad (2)$$

Реальное твёрдое тело можно рассматривать как совокупность бесконечного числа материальных точек. Поэтому,

моментом инерции твёрдого тела относительно неподвижной оси вращения Z называется скалярная величина I_z

равная

$$I_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \int_m r^2 dm = \int_V \rho dV, \quad (3)$$

где ρ - это функция зависимости плотности тела от координат, а сам интеграл определяется по всему объёму данного тела.

Физический смысл момента инерции I

Момент инерции I является мерой инертных свойств тела при его вращательном движении.

(Напомним, что масса m является мерой инертных свойств тела при его поступательном движении).

2. Что такое главные оси и главные моменты инерции тела? Каковы их свойства?

Основной особенностью момента инерции тела является то обстоятельство, что его величина зависит от выбора оси вращения тела и распределение массы тела относительно рассматриваемой оси. То есть в отличие от массы m , одно и то же тело имеет бесконечное множество моментов инерции I , в зависимости от выбора оси вращения.

Из анализа уравнений (1) и (2) следует, что величина I_z зависит не только от массы тела, но и от её распределения относительно оси вращения, поэтому в общем случае любое тело может иметь бесконечное множество различных моментов инерции (в отличие от массы тела m , которая имеет одно значение).

Среди бесконечного множества собственных моментов инерции выделяют, так называемые, **ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ** тела. Разберемся, что это такое.

Через центр инерции (центр масс) любого тела можно провести бесконечное множество осей вращения (оси, проходящие через центр инерции тела, называются **собственными**, а моменты инерции тела относительно этих осей – **собственными моментами инерции**).

Однако, из всех этих осей всегда можно выбрать ось, относительно которой собственный момент инерции будет **МАКСИМАЛЬНЫМ** $I_{\max}$, и ось, относительно которой собственный момент инерции будет **МИНИМАЛЬНЫМ** $I_{\min}$. Причем оси с максимальным и минимальным моментом инерции всегда оказываются взаимно перпендикулярными. Кроме того, только относительно этих двух осей с $I_{\max}$ и $I_{\min}$ возможно устойчивое вращение тела даже без закрепления этих осей, поэтому их ещё называют **свободными осями инерции тела**.

Главными (или **свободными**) **осями инерции** называют две оси с максимальным $I_{\max}$ и минимальным $I_{\min}$ моментами инерции тела, а также перпендикулярная им третья ось, пересекающиеся в центре инерции тела.

1. Для тел с произвольной несимметричной формой все три главных момента инерции различны: $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ (такие тела называются **асимметричными волчками**).

2. Для тел с осевой симметрией (например, однородный цилиндр) два главных момента инерции имеют одинаковую величину, третий же, в общем случае, отличен от них: $I_1 = I_2 \neq I_3$ (такие тела называются **симметричными волчками**).

3. Для тел с центральной симметрией (например, однородный шар или сфера) все три главных момента инерции равны: $I_1 = I_2 = I_3$ (такие тела называются **шаровыми волчками**).

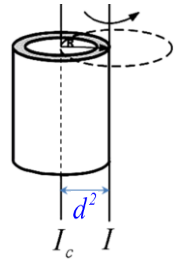
Для симметричных тел одной из главных осей инерции всегда является ось симметрии тела.

3. Сформулируйте и запишите теорему Штейнера

Если необходимо найти момент инерции тела относительно произвольной оси, не проходящей через центр масс тела, то применяют **теорему Штейнера**:

Момент инерции твёрдого тела I относительно произвольной оси, не проходящей через центр масс тела, равен сумме момента инерции этого тела I_c относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной данной, и произведения массы этого тела m на квадрат расстояния между этими осями d^2 :

$$I = I_c + md^2.$$



4.. Как определить результирующий момент сил M_z , кинетическую энергию E_{Kz} и момент импульса L_z твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси вращения Z?

Зная инертные свойства тела, можно рассчитать и другие характеристики этого тела при его вращении. Такие, например, как величину результирующего момента сил M_z , действующих на тело, величину момента импульса L_z и кинетическую энергию тела E_{Kz} , вращающегося вокруг неподвижной оси вращения, которые можно рассчитать по формулам:

$$M_z = I_z \varepsilon; \quad L_z = I_z \omega; \quad E_{Kz} = \frac{I_z \omega^2}{2},$$

где M_z - результирующий момент сил, действующих на тело, относительно оси вращения Z, $H \cdot m$ (Ньютон-метр);

L_z - момента импульса тела относительно оси вращения Z, $Дж \cdot c$ (Джоуль-секунда);

E_{Kz} - кинетическая энергия тела относительно оси вращения Z, $Дж$;

I_z - момент инерции тела относительно оси вращения Z, $кг \cdot м^2$ (килограмм-метр квадратный);

ε - угловое ускорение тела относительно оси вращения Z, $\frac{рад}{c^2}$;

ω - угловая скорость тела относительно оси вращения Z; $\frac{рад}{c}$;

5.. Запишите формулы для определения собственных моментов инерции некоторых тел массой m .

Собственные моменты инерции некоторых тел массой m

однородный тонкий стержень длиной l	однородный тонкий обруч и тонкостенный цилиндр радиусом R	однородный тонкий диск радиусом R	однородный тонкий диск радиусом R	однородный сплошной цилиндр радиусом R	однородный шар радиусом R	однородная сфера радиусом R
$I = \frac{ml^2}{12}$	$I = mR^2$	$I = \frac{mR^2}{2}$	$I = \frac{mR^2}{4}$	$I = \frac{mR^2}{2}$	$I = \frac{2}{5}mR^2$	$I = \frac{2}{3}mR^2$

6. Сформулируйте и запишите основное уравнение динамики вращательного движения абсолютно твёрдого тела

В инерциальной системе отсчёта алгебраическая сумма моментов всех внешних сил $\sum M_{zi}^{внеш}$, действующих на тело относительно неподвижной оси вращения Z, равна произведению момента инерции этого тела относительно этой оси I_z , на сообщённое ему угловое ускорение ε :

$$\sum M_{zi}^{внеш} = I_z \varepsilon \quad \text{или} \quad M_{резz}^{внеш} = I_z \varepsilon,$$

где $M_{резz}^{внеш} = \sum M_{zi}^{внеш}$ - результирующий момент всех внешних сил, действующих на тело относительно неподвижной оси вращения Z.