

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 0-1: ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Студент _____ группа _____

Допуск _____ Выполнение _____ Защита _____

Цель работы: получение и закрепление навыков обработки результатов прямых, косвенных и совместных измерений.

Приборы и материалы: математический маятник, измерительная линейка, секундомер.

Основные теоретические сведения

Одной из важнейших задач физического эксперимента является измерение различных величин. Процесс измерения состоит в том, что измеряемую величину сравнивают с другой величиной, принятой за эталон (например, длину измеряют в метрах, массу в килограммах и т. д.)

Любые измерения никогда не бывают абсолютно точными из-за всевозможных погрешностей, возникающих в процессе измерения. В связи с этим всегда возникает разброс результатов измерений, что требует специальной математической обработки полученных результатов. В процессе этой обработке вычисляется среднее значение результатов измерения, которое является наиболее близким по величине к истинному значению, а также производится оценка погрешности или, как говорят, ошибки окончательного результата.

Определение погрешности измерения является обязательным элементом любого эксперимента.

Среди множества погрешностей измерений основными являются следующие:

Систематические погрешности - это погрешности, возникающие следствие неправильной калибровки или настройки шкалы прибора (например, сбитый ноль прибора, тепловое расширение линейки и т. д.), ошибочности метода измерений и т.п.

Основной особенностью систематических погрешностей является то, что измеренные значения отклоняются от истинного значения всегда в одну и ту же сторону и на одну и ту же величину. Повторными измерениями эти ошибки устраниить или уменьшить нельзя, однако их можно оценить, проведя измерения более точными приборами, и в дальнейшем эту ошибку учитывать при вычислениях или изменить методику измерений.

К систематическим погрешностям можно отнести:

приборные погрешности – это погрешности, обусловленные тем, что практически любое измерительное устройство обладает ограниченной степенью точности, например, линейкой с ценой деления 1 см нельзя измерить длину стола с точностью до одного миллиметра и т. п. Практически для большинства измерительных устройств (за исключением электроизмерительных приборов) в **качестве приборной погрешности** принимается величина, равная **половине цены деления шкалы данного прибора**.

погрешности округления - это погрешности, обусловленные тем, что при расчетах приходится различные табличные величины всегда округлять до какого-то определенного разряда. **В качестве ошибки округления** принимают величину, равную **половине единицы последнего разряда округлённой табличной величины**.

Случайные погрешности – это погрешности, возникающие вследствие изменчивости условий эксперимента, несовершенства органов чувств человека и т. д.

Основной особенностью случайных погрешностей является то, что измеренные значения отклоняются от истинного значения то в одну, то в другую сторону на произвольную величину. Случайные погрешности можно уменьшить, увеличивая число измерений, причём с ростом числа

таких измерений ошибка уменьшается пропорционально $\frac{1}{\sqrt{n}}$, (где n - число измерений в одинаковых условиях).

Сами случайные погрешности подчиняются законам теории вероятности и математической статистики.

Чаще всего случайные погрешности проявляются в виде разброса показаний прибора. В результате этого разброса измеряемая величина случайным образом отклоняется от истинного значения в разные стороны на произвольную величину.

Промахи – это погрешности, возникающие вследствие невнимательности экспериментатора или недостаточной его квалификации и опыта.

Их можно наблюдать, например, при неправильном отсчете измеряемого значения (неправильное определение цены деления прибора и т. д.). Кроме того, к промахам могут привести внезапные сильные внешние влияния на измерительное устройство, повреждения или помехи, которые нельзя считать субъективными и т. п.

Основной особенностью промахов является то, что их величина резко выделяется из серии однотипных измерений. При обработке результатов эксперимента промахи необходимо исключить и по – возможности провести повторные измерения.

В методах математической статистики для обработки результатов измерений, в которых присутствуют только случайные погрешности, используется понятие **генеральной совокупности значений измеряемой величины** и понятие **выборки**.

Генеральной совокупностью значений данной величины x называется множество всех допустимых значений, которые может принимать эта величина x .

Выборкой объёмом n называется совокупность n значений измерений величины x :

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Очевидно, что выборка переходит в генеральную совокупность, если её объём, то есть число измерений n , стремится к максимально возможному.

Для обработки случайных погрешностей вводят следующие величины:

Средним значением выборки объёмом n для величины x называется величина, равная:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (0.1)$$

Среднее значение, как правило, оказывается наиболее близким по величине к истинному значению, чем отдельные измерения.

Дисперсией выборки (или **дисперсией опыта**) объемом n для величины x называется величина, равная :

$$S_x^2 = \frac{(x_1 - \langle x \rangle)^2 + (x_2 - \langle x \rangle)^2 + \dots + (x_n - \langle x \rangle)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n-1}. \quad (0.2)$$

Дисперсия выборки является мерой отклонения измеренных значений x_i от их среднего значения $\langle x \rangle$.

Дисперсией среднего значения объёмом n для величины x называется величина, равная:

$$S_{\langle x \rangle}^2 = \frac{(x_1 - \langle x \rangle)^2 + (x_2 - \langle x \rangle)^2 + \dots + (x_n - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}. \quad (0.3)$$

Дисперсия среднего значения является мерой отклонения среднего значения выборки от истинного значения измеряемой величины.

Величина $S_{\langle x \rangle}$, равная $S_{\langle x \rangle} = \sqrt{S_{\langle x \rangle}^2}$ называется **среднеквадратичным отклонением среднего значения** от истинного значения x_0 .

Очевидно, что среднее значение и дисперсия зависят как от измеренных значений x_i , так и от объёма выборки n . Причем, при увеличении n до бесконечности среднее значение и дисперсия выборки стремятся, соответственно, к среднему значению и дисперсии генеральной совокупности.

Дисперсию генеральной совокупности обычно обозначают σ_x^2 .

Результаты измерений величины x являются случайными числами, поскольку при измерениях присутствуют случайные погрешности измерений. Наиболее часто вероятность получения результата измерений, в которых присутствуют только случайные погрешности, описывается **распределением Гаусса**.

Плотностью распределения величины x называется функция $\varphi(x)$, такая, что вероятность dp получить измеряемую величину в интервале от x до $x+dx$ равна $dp = \varphi(x) \cdot dx$,

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_x} e^{-\frac{(x-x_{\text{см}})^2}{2\sigma_x^2}}$ - называется **функцией распределения Гаусса** (0.4)

На рис. 0.1 представлен график функции $\varphi(x)$. Важнейшим свойством её является то, что вероятность получения результата однократного измерения $x_1 \leq x \leq x_2$ равна площади под кривой в пределах x_1 до x_2 . Например, вероятность того, что искомая величина окажется в пределах значений от $x_0 - \sigma_x$ до $x_0 + \sigma_x$ равна **0.683**, в пределах от $x_0 - 2\sigma_x$ до $x_0 + 2\sigma_x$ вероятность равна **0.954**, а в пределах от $x_0 - 3\sigma_x$ до $x_0 + 3\sigma_x$ она будет равна **0.997**.

Это означает, что из **1000** измерений **683** наиболее вероятно попадут в интервал $x_0 \pm \sigma_x$, **954** - в интервал $x_0 \pm 2\sigma_x$, а **997** соответственно в интервал $x_0 \pm 3\sigma_x$.

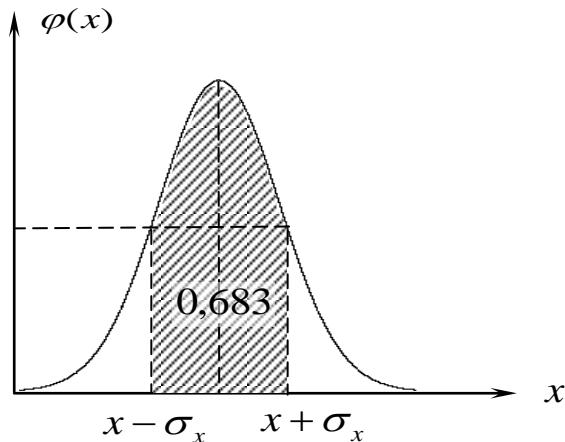


Рис. 0.1. График функции распределения Гаусса.

Прямые измерения

Прямыми называются измерения, при которых искомая величина определяется с помощью специально предназначенного для этого прибора (например, температуру определяют с помощью ТЕРМОМЕТРА, длину стола с помощью ЛИНЕЙКИ и т. д.).

Целью физического эксперимента при проведении прямых измерений является определение **среднего значения искомой величины** и, так называемого, **доверительного интервала**, в котором находится истинное значение данной величины.

Окончательный ответ при обработке прямых измерений записывается в виде:

$$x = \langle x \rangle \pm t_{p,k} \cdot S_{\langle x \rangle},$$

где $\langle x \rangle$ - среднее значение искомой величины x ,

$S_{\langle x \rangle}$ - среднеквадратичное отклонение среднего значения величины x ,

$t_{p,k}$ - коэффициент Стьюдента, значение которого зависит от числа измерений n и вероятности p доверительного интервала.

Коэффициент Стьюдента находится из таблицы 0.1. Зная количество измерений n , и задавая вероятность p доверительного интервала, находят величину параметра $t_{p,k}$ по таблице, где k - число степеней свободы ($k = n - 1$).

Таблица 0.1

Значение параметра Стьюдента в зависимости от вероятности p и числа степеней свободы $k = n - 1$

k	Вероятность p							
	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
2	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,2
3	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
4	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,8
5	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
6	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
7	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
8	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0

При обработке прямых измерений ответ должен записываться так:

$$T = (1.78 \pm 2.8 \cdot 4.4 \cdot 10^{-2})c = (1.780 \pm 0.012)c, \text{ при } p = 0.95 \text{ и } n = 5.$$

Данная запись означает следующее: было проведено пять измерений ($n = 5$) и истинное значение величины T с вероятностью $p = 95\%$ ($p = 0.95$) находится в интервале

$$(1.780 - 0.012)c \leq T \leq (1.780 + 0.012)c.$$

В том случае, если при проведении прямых измерений присутствуют кроме случайных погрешностей и другие виды погрешностей, необходимо также учитывать их влияние на искажения полученных результатов. В этом случае дисперсию прямых измерений находят по формуле:

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_n^2,$$

где S_1^2 - дисперсия измерений от случайных погрешностей, S_2^2 - дисперсия измерений от приборных погрешностей и т.д.

Рассмотрим пример обработки результатов прямых измерений.

Пусть в результате пяти измерений какой-то величины x получены следующие значения:
6; 7; 6; 5; 6.

Необходимо обработать эти результаты.

При обработке прямых измерений ответ должен быть записан следующим образом:

$$x = < x > \pm t_{p,k} \cdot S_{<x>} ,$$

где $< x >$ - среднее значение искомой величины, $t_{p,k} \cdot S_{<x>}$ - доверительный интервал,

$S_{<x>}$ - среднеквадратичное отклонение среднего значения величины x ,

$t_{p,k}$ - коэффициент Стьюдента, который находится по таблице 0.1 в зависимости от вероятности доверительного интервала p (задаётся экспериментатором) и числа степеней свободы $k = n - 1$, где n – число измерений.

Итак,

1. Находим среднее значение измерений величины x по формуле (0.1)

$$< x > = \frac{6+7+6+5+6}{5} = 6 .$$

2. Дисперсию среднего значения находим по формуле (0.3.)

$$S_{<x>}^2 = \frac{(6-6)^2 + (7-6)^2 + (6-6)^2 + (5-6)^2 + (6-6)^2}{5 \cdot (5-1)} = 0,1$$

3. Среднеквадратичное отклонение среднего значения равно

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{S_{\langle x \rangle}^2} = \sqrt{0,1} = 0,3 .$$

4. Для вероятности, например, $p = 0,95$ и числа измерений $n = 5$, находим значение параметра $t_{p,k}$ из табл. 0.1: $t_{p,k} = 2.8$

Получаем

$$x = 6 \pm 2,8 \cdot 0,3 = 6,0 \pm 0,8 .$$

5 Окончательный результат записываем в виде: $x = 6,0 \pm 0,8$ для $p = 0,95$ и $n = 5$

Косвенные измерения

Часто в процессе проведения физических исследований нет специального прибора для измерения необходимой величины y , поэтому приходится проводить косвенные измерения.

Косвенными называются измерения, при которых искомая величина рассчитывается по какой-либо функциональной зависимости с применением результатов прямых измерений.

Косвенные измерения обычно проводятся в том случае, когда прямые измерения провести не удаётся (в основном из-за того, что нет соответствующего прибора)

Косвенные измерения можно обрабатывать двумя способами:

Первый способ: по методике обработки прямых измерений,

Второй способ: с помощью частных производных.

Первый способ: по методике обработки прямых измерений

Согласно этому методу по результатам прямых измерений x_1, x_2, \dots, x_n находят по формуле $y = f(x)$ значения косвенных измерений y_1, y_2, \dots, y_n , затем по формулам (0.1) и (0.3) вычисляют среднее значение $\langle y \rangle$ и дисперсию среднего значения косвенных измерений $S_{\langle y \rangle}^2$. Используя эти величины, находят доверительный интервал и записывают окончательный ответ в виде:

$$y = \langle y \rangle \pm t_{p,k} \cdot S_{\langle y \rangle} .$$

Рассмотрим на следующем примере порядок обработки косвенных измерений первым способом.

Пусть для некоторого бегуна на 100-метровке пятью наблюдателями получены следующие значения времени пробега в секундах $t_i \in \{13,2c; 13,4c; 13,5c; 13,1c; 13,6c\}$.

Необходимо найти величину средней скорости бегуна на этой дистанции.

Так как мы обрабатываем результаты эксперимента по методике прямых измерений, то ответ должен быть записан в виде

$$v = \langle v \rangle \pm t_{p,k} \cdot S_{\langle v \rangle} .$$

1. Среднюю скорость бегуна можно определить по формуле $v = \frac{S}{t}$. Следовательно:

$$v_1 = \frac{S_1}{t_1} = \frac{100m}{13,2c} = 7,58 \frac{m}{c}, \quad v_2 = \frac{S_2}{t_2} = \frac{100m}{13,4c} = 7,46 \frac{m}{c}, \quad v_3 = \frac{100m}{13,5c} = 7,41 \frac{m}{c},$$

$$v_4 = \frac{100m}{13,1c} = 7,64 \frac{m}{c}, \quad v_5 = \frac{100m}{13,6c} = 7,35 \frac{m}{c} .$$

2. Находим среднее значение скорости по результатам всех измерений:

$$\langle v \rangle = \frac{(7,58 + 7,46 + 7,41 + 7,64 + 7,35) \frac{m}{c}}{5} = 7,49 \frac{m}{c}$$

3. Находим дисперсию среднего значения скорости

$$S_{\langle v \rangle}^2 = \frac{\left(7,58 \frac{m}{c} - 7,49 \frac{m}{c}\right)^2 + \left(7,46 \frac{m}{c} - 7,49 \frac{m}{c}\right)^2 + \dots + \left(7,35 \frac{m}{c} - 7,49 \frac{m}{c}\right)^2}{5(5-1)} = 2,88 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{c^2}.$$

4. Находим среднеквадратичное отклонение: $S_{\langle v \rangle}^2 = \sqrt{2,88 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{c^2}} = 0,054 \frac{m}{c}$

5. Для вероятности, например, $p = 0,9$ и числа измерений $n = 5$, находим значение параметра $t_{p,k}$ из табл. 0.1: $t_{p,k} = 2.1$

6. Предварительный результат записываем в виде

$$v = (7.49 \pm 2.1 \cdot 0.054) \frac{m}{c} = (7.49 \pm 0.11) \frac{m}{c}$$

7. Окончательный результат записываем в виде

$$v = (7.49 \pm 0.11) \frac{m}{c} \text{ для } p = 0,9 \text{ и числа измерений } n = 5.$$

Такой ответ означает, что было проведено 5 измерений и доверительный интервал записан с вероятностью 95%, то есть, экспериментатор гарантирует, что истинное значение искомой величины с вероятностью 95% находится в интервале значений $\langle v \rangle - t_{p,k} S_{\langle v \rangle} \leq v \leq \langle v \rangle + t_{p,k} S_{\langle v \rangle}$, то есть

$$(7.49 - 0.11) \frac{m}{c} \leq v \leq (7.49 + 0.11) \frac{m}{c}.$$

Второй способ обработки: с помощью частных производных

Часто первый способ обработки экспериментальных данных оказывается трудоёмким, либо эксперименты очень дорогими, поэтому много измерений провести не удаётся. В этом случае результаты эксперимента обрабатывают вторым способом - методом частных производных.

В этом случае окончательный ответ должен быть записан в виде: $y = \langle y \rangle \pm S_y$.

Здесь возможны два случая.

Первый случай: искомая величина y является функцией *одной переменной* x , то есть $y = f(x)$. Среднее значение косвенного измерения $\langle y \rangle$ находят путем подстановки соответствующего среднего значения прямых измерений величины x в следующее равенство $\langle y \rangle = f(\langle x \rangle)$.

Среднеквадратичное отклонение величины y определяется по формуле: $S_y = \sqrt{S_x^2}$,

Дисперсию опыта S_y^2 определяют по формуле:

$$S_y^2 = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 S_x^2, \quad (0.7)$$

где $\frac{dy}{dx}$ - первая производная функции y по переменной x ,

$$S_x^2 = \frac{(x_1 - \langle x \rangle)^2 + (x_2 - \langle x \rangle)^2 + \dots + (x_n - \langle x \rangle)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n-1} - \text{дисперсия опыта}$$

величины x .

Окончательный ответ записывается в виде: $y = \langle y \rangle \pm S_y$.

Второй случай: искомая величина y является *функцией нескольких переменных* x, z, t, \dots ,

то есть

$$y = f(x, z, t, \dots).$$

В этом случае среднее значение косвенного измерения $\langle y \rangle$ находят путем подстановки соответствующих средних значений прямых измерений величин $\langle x \rangle, \langle z \rangle, \langle t \rangle, \dots$ в нашу функциональную зависимость, то есть

$$\langle y \rangle = f(\langle x \rangle, \langle z \rangle, \langle t \rangle, \dots).$$

Среднеквадратичное отклонение величины y рассчитывают по формуле: $S_y = \sqrt{S_y^2}$,

Дисперсию опыта S_y^2 величины y определяют по формуле:

$$S_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 S_x^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 S_z^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 S_t^2 + \dots \quad (0.9)$$

где $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial t}$ - частные производные функции $y = f(x, z, t, \dots)$ по переменным x, z, t, \dots

(частные производные находятся как обычные производные в предположении, что какая-то одна величина из x, z, t, \dots является переменной, а остальные величины принимаются за константы).

Обращаем внимание на то, что число слагаемых в уравнении (0.9) равно числу переменных x, z, t, \dots в уравнении функции $y = f(x, z, t, \dots)$.

Окончательный ответ записывают в виде: $y = \langle y \rangle \pm S_y$.

Рассмотрим на следующем примере порядок обработки косвенных измерений вторым способом.

Пусть для некоторого бегуна на 100-метровке пятью наблюдателями получены следующие значения времени пробега в секундах $t_i \in \{13,2 c; 13,4 c; 13,5 c; 13,1 c; 13,6 c\}$.

Необходимо найти величину средней скорости бегуна на этой дистанции.

Ответ должен быть записан в виде

$$v = \langle v \rangle \pm S_{\langle v \rangle}.$$

1. Среднее значение скорости спортсмена определим по формуле $\langle v \rangle = \frac{S}{\langle t \rangle}$.

Поэтому для начала найдём среднее значение времени пробега по дистанции:

$$\langle t \rangle = \frac{13,2 c + 13,4 c + 13,5 c + 13,1 c + 13,6 c}{5} = 13,36 c$$

2. Затем определяем среднее значение скорости

$$\langle v \rangle = \frac{S}{\langle t \rangle} = \frac{100 m}{13,36 c} = 7,49 \frac{m}{c}$$

2. Находим формулу для определения дисперсии скорости S_v^2 . Так как формула для нахождения

средней скорости $\langle v \rangle = \frac{S}{\langle t \rangle}$ является функцией двух переменных S и $\langle t \rangle$, то дисперсии скорости S_v^2 будет состоять из двух слагаемых:

$$S_v^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial S} \right)^2 S^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 S_t^2.$$

3. Определим каждый множитель в формуле для S_v^2 .

Для этого сначала рассчитываем частные производные:

$$\frac{\partial v}{\partial S} = \frac{\partial \left(\frac{S}{\langle t \rangle} \right)}{\partial S} = \frac{1}{\langle t \rangle}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \left(\frac{S}{\langle t \rangle} \right)}{\partial t} = -\frac{S}{\langle t \rangle^2}$$

Погрешность в определении длины пути S_s находим как приборную погрешность. Напомним, что в **качестве приборной погрешности** принимается величина, равная **половине цены деления шкалы данного прибора**.

Полагая, что дистанция измерялась лентой с ценой деления 1 см, получаем погрешность измерений расстояния

$$S_{\langle S \rangle} = 0.5 \text{ см} = 0,005 \text{ м}.$$

Дисперсию времени S_t^2 определим по формуле

$$S_t^2 = \frac{(t_1 - \langle t \rangle)^2 + (t_2 - \langle t \rangle)^2 + \dots + (t_5 - \langle t \rangle)^2}{5-1} = \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \langle t \rangle)^2}{5-1}.$$

$$S_t^2 = \frac{(13,2 \text{ с} - 13,4 \text{ с})^2 + (13,4 \text{ с} - 13,4 \text{ с})^2 + \dots + (13,6 \text{ с} - 13,4 \text{ с})^2}{5-1} = 0,045 \text{ с}^2$$

Получим

$$S_t^2 = 0,045 \text{ с}^2$$

5. Таким образом, формула для определения дисперсии скорости S_v^2 будет иметь вид:

$$S_v^2 = \left(\frac{I}{\langle t \rangle} \right)^2 \cdot S_s^2 + \left(-\frac{S}{\langle t \rangle^2} \right)^2 \cdot S_t^2 = \frac{I}{\langle t \rangle^2} \cdot S_s^2 + \frac{S^2}{\langle t \rangle^4} \cdot S_t^2$$

6. Далее вычисляем дисперсию скорости S_v^2 и среднеквадратичное отклонение скорости $S_{\langle v \rangle}$:

$$S_{\langle v \rangle}^2 = \left(\frac{I}{13,36 \text{ с}} \right)^2 \cdot (0,005 \text{ м})^2 + \left(-\frac{100 \text{ м}}{(13,36 \text{ с})^2} \right)^2 \cdot 0,045 \text{ с}^2 = 0,014 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

$$S_{\langle v \rangle} = \sqrt{0,014 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}} = 0,12 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

7. Записываем окончательный результат $v = (7,49 \pm 0,12) \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Следует обратить внимание на то, что при втором способе обработки доверительный интервал записывается без учета параметра Стьюдента, поэтому этот способ обработки косвенных измерений является менее строгим по сравнению с первым.

Рассмотрим ещё один пример:

Определим объём цилиндра

Объём цилиндра находится по формуле $V = \pi R^2 h$ или $V = \frac{1}{4} \pi d^2 h$ (1)

Метод прямых измерений

Сначала произведём несколько замеров радиусов R_i (а лучше диаметров d_i) цилиндра и его высоты h_i .

Для того, чтобы можно было статистически грамотно обработать результаты опыта, необходимо провести минимум по три замера, а лучше по пять, например,

№ замера	$d_i, 10^{-3} \text{ м}$	$h_i, 10^{-3} \text{ м}$
1	20.0	10.1
2	20.1	10.2
3	19.9	10.1
4	20.1	10.0
5	20.1	10.1

При обработке методом прямых измерений окончательный ответ должен быть записан в виде

$$V = \langle V \rangle \pm t_{p,k} S_{\langle V \rangle}, \text{ для } n = 5 \text{ и } p = 0.95.$$

1. Среднее значение объёма цилиндра находим по формуле: $\langle V \rangle = \frac{\sum V_i}{n} = \frac{V_1 + V_2 + \dots + V_n}{n}$,

где $V_i = \frac{1}{4} \pi d_i^2 h_i$ - это результат i -го измерения.

Получим следующие значения:

$$V_1 = \frac{1}{4} \pi d_1^2 h_1 = \frac{1}{4} \cdot 3,14 \cdot (20,0 \cdot 10^{-3} \text{ м})^2 \cdot 10,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,17 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 3,17 \text{ см}^3.$$

Аналогично, получим

$$V_2 = \frac{1}{4} \pi d_2^2 h_2 = 3,23 \text{ см}^3, \quad V_3 = \frac{1}{4} \pi d_3^2 h_3 = 3,14 \text{ см}^3, \quad V_4 = \frac{1}{4} \pi d_4^2 h_4 = 3,17 \text{ см}^3,$$

$$V_5 = \frac{1}{4} \pi d_5^2 h_5 = 3,20 \text{ см}^3.$$

Тогда среднее значение объёма цилиндра равно:

$$\langle V \rangle = \frac{\sum V_i}{n} = \frac{3,17 \text{ см}^3 + 3,23 \text{ см}^3 + 3,14 \text{ см}^3 + 3,17 \text{ см}^3 + 3,20 \text{ см}^3}{5} = 3,18 \text{ см}^3.$$

2. Среднее квадратичное отклонение среднего значения объёма цилиндра находим по формуле:

$$S_{\langle V \rangle} = \sqrt{\frac{\sum (V_i - \langle V \rangle)^2}{n(n-1)}}.$$

$$S_{\langle V \rangle} = \sqrt{\frac{(3,17 \text{ см}^3 - 3,18 \text{ см}^3)^2 + (3,23 \text{ см}^3 - 3,18 \text{ см}^3)^2 + \dots + (3,20 \text{ см}^3 - 3,18 \text{ см}^3)^2}{5 \cdot 4}} = 0,0153 \text{ см}^3$$

3. Коэффициент Стьюдента определяем из таблицы 1 в зависимости от числа степеней свободы $k = n - 1$ и вероятности доверительного интервала p , который выбирает сам экспериментатор.

Для вероятности, например, $p = 0,9$ и числа измерений $n = 5$, находим значение параметра $t_{p,k}$ из табл. 0.1: $t_{p,k} = 2.1$

4. Предварительный результат записываем в виде

$$V = (3,18 \pm 2.1 \cdot 0,0153) \text{ см}^3 = (3,18 \pm 0,03) \text{ см}^3$$

5. Окончательный результат записываем в виде

$$V = (3,18 \pm 0,03) \text{ см}^3 \text{ для } p = 0,9 \text{ и числа измерений } n = 5.$$

Методом прямых измерений обычно пользуются, когда измерения заметно различаются друг от друга (например, из-за того, что цилиндр изготовлен не очень качественно).

Метод частных производных

Обработаем теперь результаты наших замеров для цилиндра методом частных производных.

№ замера	$d_i, \text{ см}$	$h_i, \text{ см}$
1	2,00	1,01
2	2,01	1,02
3	1,99	1,01
4	2,01	1,00
5	2,01	1,01

В этом случае ответ должен быть записан в виде: $V = \langle V \rangle \pm S_V$.

1. Находим сначала средние значения диаметра $\langle d \rangle$ и высоты $\langle h \rangle$ цилиндра:

$$\langle d \rangle = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_5}{5} \quad \text{и} \quad \langle h \rangle = \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_5}{5}.$$

$$\langle d \rangle = \frac{(2,00 + 2,01 + 1,99 + 2,01 + 2,01) \text{ см}}{5} = 2,0 \text{ см}, \quad \langle h \rangle = \frac{(1,01 + 1,02 + 1,01 + 1,00 + 1,01) \text{ см}}{5} = 1,01 \text{ см}.$$

2. Находим среднее значение объёма цилиндра по формуле $\langle V \rangle = \frac{1}{4}\pi \langle d \rangle^2 \langle h \rangle$.

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4}\pi \langle d \rangle^2 \langle h \rangle = \frac{1}{4} \cdot 3,14 \cdot (2,0 \text{ см})^2 \cdot 1,01 \text{ см} = 3,17 \text{ см}^3$$

3. Так как формула для определения объёма цилиндра $V = \frac{1}{4}\pi d^2 h$ является функцией трёх переменных π, d и h , то формула для определения дисперсии опыта S_V^2 будет состоять из трёх слагаемых.

Число π в формуле $V = \frac{1}{4}\pi d^2 h$ необходимо рассматривать как переменную ввиду того, что она является числом с большим количеством знаков после запятой. В этом случае степень его округления будет влиять на полученные результаты, что следует учитывать при расчётах величины S_V^2 .

Таким образом, формула для определения дисперсии опыта будет иметь следующий вид:

$$S_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial d} \right)^2 S_d^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h} \right)^2 S_h^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \pi} \right)^2 S_\pi^2.$$

4. Найдём каждую величину в формуле для нахождения S_V^2 .

Сначала определим частные производные

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \left(\frac{1}{4} \pi d^2 h \right)'_d = 2 \frac{1}{4} \pi d h = \frac{1}{2} \pi d h; \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \left(\frac{1}{4} \pi d^2 h \right)'_h = \frac{1}{4} \pi d^2; \quad \frac{\partial V}{\partial \pi} = \left(\frac{1}{4} \pi d^2 h \right)'_\pi = \frac{1}{4} d^2 h.$$

В эти формулы вместо d и h необходимо подставить их средние значения $\langle d \rangle$ и $\langle h \rangle$.

Таким образом: $\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2} \pi \langle d \rangle \langle h \rangle$; $\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{4} \pi \langle d \rangle^2$ и $\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{4} \langle d \rangle^2 \langle h \rangle$.

Окончательно получаем: $S_V^2 = \left(\frac{1}{2} \pi \langle d \rangle \langle h \rangle \right)^2 S_d^2 + \left(\frac{1}{4} \pi \langle d \rangle^2 \right)^2 S_h^2 + \left(\frac{1}{4} \langle d \rangle^2 \langle h \rangle \right)^2 S_\pi^2$ и $S_V = \sqrt{S_V^2}$.

Проведём расчёты.

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2} \pi \langle d \rangle \langle h \rangle = \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot 2,0 \text{ см} \cdot 1,0 \text{ см} = 3,14 \text{ см}^2; \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{4} \pi \langle d \rangle^2 = \frac{1}{4} \cdot 3,14 \cdot (2,0 \text{ см})^2 = 3,14 \text{ см}^2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{4} \langle d \rangle^2 \langle h \rangle = \frac{1}{4} \cdot (2,0 \text{ см})^2 \cdot 1,0 \text{ см} = 1,0 \text{ см}^3$$

При этом величины S_d^2 и S_h^2 находим как дисперсии опыта по формулам

$$S_d^2 = \frac{\sum (d_i - \langle d \rangle)^2}{n-1} \quad \text{и} \quad S_h^2 = \frac{\sum (h_i - \langle h \rangle)^2}{n-1}.$$

$$S_d^2 = \frac{\sum (d_i - \langle d \rangle)^2}{n-1} = \frac{(2,0 \text{ см} - 2,0 \text{ см})^2 + (2,01 \text{ см} - 2,0 \text{ см})^2 + \dots + (2,01 \text{ см} - 20,0 \text{ см})^2}{4} = 0,01 \text{ см}^2,$$

$$S_h^2 = \frac{\sum (h_i - \langle h \rangle)^2}{n-1} = \frac{(10,2 \text{ см} - 10,1 \text{ см})^2 + (20,1 \text{ см} - 10,1 \text{ см})^2 + \dots + (10,1 \text{ см} - 10,1 \text{ см})^2}{4} = 0,005 \text{ см}^2$$

Величину S_π^2 находим как квадрат табличной погрешности. Напомним, что **в качестве табличной погрешности принимается величина, равная половине единицы последнего разряда окружлённой табличной величины**.

(То есть, если величина округлена до сотых, то погрешность равна половине одной сотой ($0,01/2=0,005$), если величина округлена до тысячных, то погрешность равна половине одной тысячной ($0,001/2=0,0005$) и т.п.).

Если взять $\pi = 3,14$, то $S_\pi = 0,005$ и, следовательно, $S_\pi^2 = (0,005)^2 = 25 \cdot 10^{-6}$.

Тогда: $S_V^2 = (3,14 \text{ см}^2)^2 \cdot 0,01 \text{ см}^2 + (3,14 \text{ см}^2)^2 \cdot 0,005 \text{ см}^2 + (1,0 \text{ см}^3)^2 \cdot 25 \cdot 10^{-6} = 0,14 \text{ см}^6$

и

$$S_V = \sqrt{S_V^2} = \sqrt{0,14 \text{ см}^6} = 0,37 \text{ см}^3.$$

4. Окончательный ответ записываем в виде: $V = (3,17 \pm 0,37) \text{ см}^3$.

Совместные измерения. Метод наименьших квадратов.

Совместными называются измерения, при которых одновременно определяются значения функции y и значения аргументов x .

Совместные измерения проводятся для определения неизвестных коэффициентов A , B и т.д. в какой-либо функциональной зависимости (например, в уравнении $y = A \cdot x$ необходимо найти параметр A , а в уравнении $y = A \cdot x + B$ необходимо определить параметры A и B . После определения неизвестных коэффициентов A и B можно будет проводить косвенные измерения).

Рассмотрим совместные измерения и порядок их обработки на следующем примере. Допустим, величина Y и величина X связаны между собой линейной зависимостью

$$y = A \cdot x \quad (0.10)$$

Пусть в этой зависимости неизвестен коэффициент A . Для его определения необходимо провести совместные измерения. Для этого необходимо одновременно осуществить несколько измерений величин x и y , последовательно определяя их в процессе эксперимента. В этом случае, изменяя каждый раз величину аргумента x_i , из опыта определяем соответствующие значения функции y_i . В результате получим n пар значений $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

Отметим на графике в координатах XOY наши экспериментальные точки (см. рис. 0.2 а).

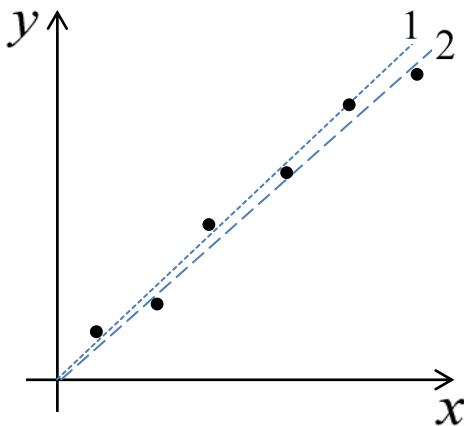


Рис. 0.2 а

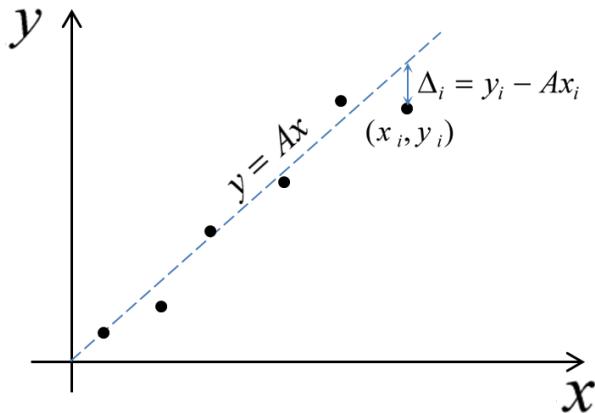


Рис. 0.2 б

Мы увидим, что вследствие случайных погрешностей, полученные нами экспериментальные точки не лежат точно на одной прямой. В результате этого мы можем провести через них много различных прямых (как, например, прямые 1 и 2 на рис.0.2 а). Поэтому необходимо сформулировать критерий для определения неизвестного углового коэффициента A в линейной зависимости $y = A \cdot x$, который бы наилучшим образом соответствовал нашим экспериментальным точкам (см. рис. 0.2 б).

Этот критерий в математической статистике получил название **критерия наименьших квадратов**. Суть этого метода заключается в следующем. Необходимо определить параметр A таким образом, чтобы выполнялись следующие требования:

1. Прямая $y = A \cdot x$ должна проходить так, чтобы экспериментальные точки располагались по обе стороны от этой прямой.

2. Отклонения Δ_i каждого i -го экспериментального значения y_i от нашей прямой $y = A \cdot x$ (то есть $\Delta_i = y_i - A \cdot x_i$) должны удовлетворять следующему критерию:

угловой коэффициент A искомой нами прямой $y = A \cdot x$ должен быть таким, чтобы сумма квадратов отклонений Δ_i^2 от теоретической прямой $y = A \cdot x$ была минимальной.

Это условие метода наименьших квадратов математически записывается так:

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - A \cdot x_i)^2 \rightarrow \min \quad (0.12)$$

В выражении (0.12) остаточная сумма квадратов Q является функцией неизвестного параметра A . Из правил математики известно, что минимальное значение этой функции достигается тогда, когда её производная при некотором неизвестном значении параметра A будет равна нулю, то есть:

$$\frac{dQ}{dA} = 0 \quad (0.13)$$

Следовательно, взяв от суммы (0.12) производную по параметру A и приравняв её к нулю, найдём искомую нами величину A .

$$\frac{d \left[\sum_{i=1}^n (y_i - A \cdot x_i)^2 \right]}{dA} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - A \cdot x_i) \cdot (-x_i) = 0 \quad (0.14)$$

Это уравнение линейное относительно A , и из него легко можно получить формулу для нахождения

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (0.15)$$

неизвестного параметра A :

Параметр A является случайной величиной. С помощью методов математической статистики можно найти формулу для определения дисперсии этого параметра

$$S_A^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - A \cdot x_i)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (0.16)$$

Таким образом, метод наименьших квадратов позволяет определить по результатам n совместных измерений, как величину неизвестного параметра A , так и его дисперсию S_A^2 .

В ряде случаев функциональная зависимость между величинами y и x может отличаться от простейшей линейной зависимости (0.10). Часто приходится использовать несколько более сложную зависимость. Неизвестными уже могут быть не один, а два параметра, которые в результате совместных измерений необходимо определить. Такой зависимостью, например, является линейная функция вида

$$y = A \cdot x + B \quad (0.17)$$

Применяя метод наименьших квадратов, можно аналогичным образом получить расчетные формулы для определения неизвестных коэффициентов A и B в этом случае. Эти формулы будут иметь вид:

$$A = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (0.18)$$

Величину дисперсии этих параметров можно определить по формулам:

$$S_A^2 = \frac{n}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \cdot \frac{Q}{n-2}, \quad S_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \cdot \frac{Q}{n-2},$$

где $Q = \sum_{i=1}^n (y_i - A \cdot x_i - B)^2$.

Проверка статистических гипотез. Критерий Фишера

Первый вопрос, который нас интересует после вычисления коэффициента A , это проверка соответствия (0.10) экспериментальным данным x_i, y_i .

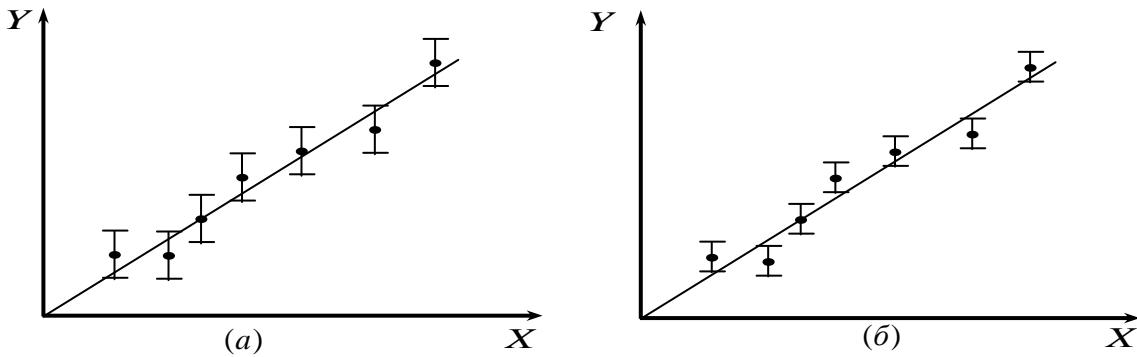


Рис. 0.3.

На рис. 0.3 (а) и рис. 0.3 (б) линией показана зависимость $y = A \cdot x$, полученная по методу наименьших квадратов. Точками показаны экспериментальные данные, которые получены с какими-то погрешностями, а усиками указан интервал значений с разбросом, равным $\pm 2 \cdot S_y$, внутри которого находится истинное значение данной экспериментальной точки.

Очевидно, что зависимость $y = A \cdot x$ соответствует экспериментальным данным только на рис. 0.3 (а).

На рис. 0.3(б) прямая $y = A \cdot x$ не везде проходит через указанный интервал возможных истинных значений экспериментальных точек.

Однако это качественные соображения, а нам нужна количественная оценка. Для характеристики среднего разброса точек относительно прямой $y = A \cdot x$ вполне подходит остаточная сумма квадратов Q . Неудобство состоит в том, что остаточная сумма квадратов Q зависит от числа коэффициентов в уравнении. Кроме того, если ввести столько коэффициентов, сколько имеется независимых измерений, то мы получим остаточную сумму, равную нулю. Поэтому предпочитают делить остаточную сумму Q квадратов на число степеней свободы k .

Числом степеней свободы k в математической статистике называется разность между числом измерений n и числом коэффициентов m , входящих в уравнение $y = f(x, A_1, A_2, \dots, A_m)$, то есть

$$k = n - m.$$

Дисперсией адекватности S_{ad}^2 называется скалярная величина, равная отношению остаточной суммы квадратов Q , к числу степеней свободы $k = n - m$, то есть

$$S_{ad}^2 = \frac{Q}{n - m} \quad (0.19)$$

Для зависимости $y = A \cdot x$ дисперсия адекватности равна $S_{ad}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - A \cdot x_i)^2}{n - 1}$, где n – число совместных измерений величин (x_i, y_i) .

Для проверки соответствия зависимости $y = A \cdot x$ экспериментальным данным используют F -критерий (**критерий Фишера**). В этом случае вычисляют следующее соотношение

$$F = \frac{S_{ad}^2}{S_{on}^2} \quad (0.21)$$

где S_{on}^2 - это дисперсия опыта, то есть:

$$S_{on}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{d-1}, \quad (0.22)$$

где d - число прямых измерений величины y_i .

Из предыдущего равенства видно, что параметр F является величиной случайной и для него существует функция распределения, которая впервые была получена Фишером. Из табл. 0-2 находят при известном числе степеней свободы дисперсии $(n-m), (d-1)$ и заданной вероятности p , значения $F_{\text{табл}}^{(n-m),(d-1)}$

Далее проверяют двухстороннее неравенство

$$\frac{1}{F_{\text{табл}}^{(n-m),(d-1)}} \leq \frac{S_{ad}^2}{S_{on}^2} \leq F_{\text{табл}}^{(n-m),(d-1)} \quad (0.23)$$

В том случае, когда $S_{ad}^2 \geq S_{on}^2$, достаточно производить одностороннюю оценку, т.е.

$$\frac{S_{ad}^2}{S_{on}^2} \leq F_{\text{табл}}^{(n-m),(d-1)} \quad (0.24)$$

Если данные условия выполняются, то с вероятностью, равной p , можно утверждать, что зависимость $y = A \cdot x$ соответствует полученным экспериментальным данным.

Таблица 0.2:

Значения критерия Фишера $F_{\text{табл}}^{(n-m),(d-1)}$ при надежности $p = 0.95$ в зависимости от числа степеней свободы сравниваемых величин дисперсий.

d - 1	n - m		
	3	4	5
2	19.00	19.16	19.25
3	9.55	9.28	9.12
4	6.94	6.59	6.39
5	5.79	5.41	5.19

Контрольные вопросы

1. Дайте определение основным видам погрешностей: случайные, систематические и промахи. Напишите об их особенностях.
2. Дайте определение среднего значения выборки, дисперсии опыта и дисперсии среднего значения.
3. Дайте определение прямых, косвенных и совместных измерений. В каком случае проводится каждый вид измерений?
4. В чём заключается идея метода наименьших квадратов?

ВНИМАНИЕ: для защиты лабораторной работы необходимо её оформить, провести расчёты согласно результатам эксперимента для Вашей бригады, грамотно заполнить таблицы, проверить размерность формул, грамотно записать ответы и ответить в письменном виде на контрольные вопросы.

Сфотографируйте Вашу работу, а так же ответы на контрольные вопросы, и пришлите фотографии мне на WhatsApp или принесите на занятия. Не забудьте подписать лабораторную работу.

Тому, кто выполнит все требования, я зачу лабораторную работу. Не тратьте время зря. Вам сдавать экзамен.

Экспериментальные данные, полученные при выполнении лабораторной работы 0-1

Упражнения 1 и 2: Порядок обработки прямых измерений.
Определение периода колебаний математического маятника.

Номер бригады	Длина нити l (м)	Период колебаний				
		T ₁ (с)	T ₂ (с)	T ₃ (с)	T ₄ (с)	T ₅ (с)
1	0.50	1.417	1.416	1.418	1.417	1.415
2	0.47	1.376	1.376	1.376	1.377	1.375
3	0.44	1.335	1.335	1.332	1.332	1.333
4	0.41	1.286	1.286	1.286	1.286	1.285
5	0.38	1.236	1.236	1.235	1.237	1.236
6	0.35	1.192	1.192	1.192	1.194	1.192
7	0.32	1.144	1.145	1.145	1.142	1.145
8	0.29	1.085	1.087	1.085	1.085	1.087
9	0.26	1.036	1.033	1.032	1.035	1.032
10	0.23	0.977	0.977	0.976	0.977	0.977

Упражнение 3. Порядок обработки совместных измерений.
Определение ускорения свободного падения

N изм	Бригада 1		Бригада 2		Бригада 3		Бригада 4		Бригада 5	
	l_i	T_i								
1	0.50	1.447	0.47	1.376	0.44	1.335	0.41	1.286	0.38	1.236
2	0.44	1.335	0.41	1.286	0.50	1.416	0.47	1.416	0.50	1.447
3	0.38	1.236	0.35	1.192	0.38	1.236	0.35	1.192	0.44	1.192
4	0.32	1.144	0.29	1.085	0.32	1.192	0.29	1.087	0.32	1.085
5	0.26	1.036	0.23	0.977	0.26	1.145	0.23	0.977	0.26	1.145

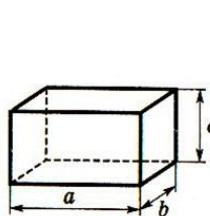
N изм	Бригада 6		Бригада 7		Бригада 8		Бригада 9		Бригада 10	
	l_i	T_i	l_i	T_i	l_i	T_i	l_i	T_i	l_i	T_i
1	0.35	1.192	0.32	1.144	0.29	1.085	0.26	1.036	0.23	0.977
2	0.47	1.376	0.50	1.415	0.47	1.377	0.50	1.418	0.47	1.377
3	0.41	1.286	0.44	1.332	0.41	1.286	0.44	1.332	0.41	1.286
4	0.29	1.085	0.38	1.237	0.35	1.192	0.38	1.236	0.35	1.192
5	0.23	0.976	0.26	0.977	0.23	0.977	0.32	1.142	0.29	1.085

Таблица производных

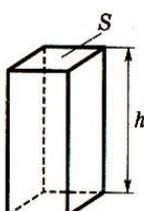
Функция	Производная	Функция	Производная
x^n	$n x^{n-1}$	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
e^{nx}	$n e^{nx}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{vu' - uv'}{v^2}$	$\arctg x$	$\frac{1}{1+x^2}$

ПРИСТАВКИ И МНОЖИТЕЛИ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ ДЕСЯТИЧНЫХ И ДОЛЬНЫХ ЕДИНИЦ

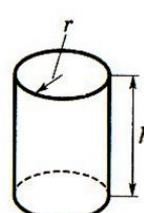
Приставка	Символ		Множитель
	Международный	Русский	
экса	E	Э	10^{18}
пета	P	П	10^{15}
тера	T	Т	10^{12}
гига	G	Г	10^9
мега	M	М	10^6
кило	k	к	10^3
гекто	h	г	10^2
дека	da	да	10
деци	d	д	10^{-1}
санти	c	с	10^{-2}
милли	m	м	10^{-3}
микро	μ	мк	10^{-6}
nano	n	н	10^{-9}
пико	p	п	10^{-12}
фемто	f	ф	10^{-15}
атто	a	а	10^{-18}



$$V = abc$$



$$V = Sh$$



$$V = \pi r^2 h$$

Объём шара:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Площадь поверхности шара: $S = 4\pi R^2$ Длина окружности: $l = 2\pi R$ Площадь круга: $S = \pi R^2$

Таблица синусов и косинусов

α	0	30	45	60	90
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Ответы на контрольные вопросы

1 Дайте определение основным видам погрешностей: случайные, систематические и промахи. Напишите об их особенностях.

Различают **систематические** погрешности, **случайные** погрешности и **промахи**.

Систематические погрешности - это погрешности, возникающие следствие неправильной калибровки или настройки шкалы прибора (например, сбитый ноль прибора, тепловое расширение линейки и т. д.), ошибочности метода измерений и т.п.

Основной особенностью систематических погрешностей является то, что измеренные значения отклоняются от истинного значения всегда в одну и ту же сторону и на одну и туже величину. Повторными измерениями эти ошибки устраниить или уменьшить нельзя.

К систематическим погрешностям можно отнести:

приборные погрешности – это погрешности, обусловленные тем, что практически любое измерительное устройство обладает ограниченной степенью точности.

Для большинства измерительных устройств (за исключением электроизмерительных приборов) в **качестве приборной погрешности** принимается величина, равная **половине цены деления шкалы данного прибора**.

погрешности округления - это погрешности, обусловленные тем, что при расчетах приходится различные табличные величины всегда округлять до какого-то определенного разряда. В **качестве ошибки округления** принимают величину, равную **половине единицы последнего разряда округлённой табличной величины**.

Случайные погрешности – это погрешности, возникающие вследствие изменчивости условий эксперимента, несовершенства органов чувств человека и т. д.

Основной особенностью случайных погрешностей является то, что измеренные значения отклоняются от истинного значения то в одну, то в другую сторону на произвольную величину. Случайные погрешности можно уменьшить, увеличивая число измерений. Сами случайные погрешности подчиняются законам теории вероятности и математической статистики.

Промахи – это погрешности, возникающие вследствие невнимательности экспериментатора или недостаточной его квалификации и опыта.

Их можно наблюдать, например, при неправильном отсчете измеряемого значения (неправильное определение цены деления прибора и т. д.). Кроме того, к промахам могут привести внезапные сильные внешние влияния на измерительное устройство, повреждения или помехи, которые нельзя считать субъективными и т. п..

Основной особенностью промахов является то, что их величина резко выделяется из серии однотипных измерений. При обработке результатов эксперимента промахи необходимо исключить и по – возможности провести повторные измерения.

2. Дайте определение среднего значения выборки, дисперсии опыта и дисперсии среднего значения.

Средним значением выборки объёмом n для величины x называется величина, равная:

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Среднее значение, как правило, оказывается наиболее близким по величине к истинному значению, чем отдельные измерения.

Дисперсией выборки (или **дисперсией опыта**) объемом n для величины x называется величина, равная:

$$S_x^2 = \frac{(x_1 - \langle x \rangle)^2 + (x_2 - \langle x \rangle)^2 + \dots + (x_n - \langle x \rangle)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n-1}.$$

Дисперсия выборки является мерой отклонения измеренных значений x_i от их среднего значения $\langle x \rangle$.

Дисперсией среднего значения объемом n для величины x называется величина, равная :

$$S_{\langle x \rangle}^2 = \frac{(x_1 - \langle x \rangle)^2 + (x_2 - \langle x \rangle)^2 + \dots + (x_n - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}.$$

Дисперсия среднего значения является мерой отклонения среднего значения выборки от истинного значения измеряемой величины.

Величина $S_{\langle x \rangle}$, равная $S_{\langle x \rangle} = \sqrt{S_{\langle x \rangle}^2}$ называется **среднеквадратичным отклонением среднего значения** от истинного значения x_0 .

3. Дайте определение прямых, косвенных и совместных измерений. В каком случае проводится каждый вид измерений?

Прямые измерения

Прямыми называются измерения, при которых искомая величина определяется с помощью специально предназначенного для этого прибора.

(например, температуру определяют с помощью ТЕРМОМЕТРА, длину стола с помощью ЛИНЕЙКИ и т. д.).

Целью физического эксперимента при проведении прямых измерений является определение **среднего значения искомой величины** $\langle x \rangle$ и, так называемого, **доверительного интервала** $t_{p,k} S_{\langle x \rangle}$, в котором находится истинное значение данной величины.

Окончательный ответ при обработке прямых измерений записывается в виде:

$$x = \langle x \rangle \pm t_{p,k} S_{\langle x \rangle},$$

где $\langle x \rangle$ - среднее значение искомой величины x ,

$S_{\langle x \rangle}$ - среднеквадратичное отклонение среднего значения величины x ,

$t_{p,k}$ - коэффициент Стьюдента, значение которого зависит от числа измерений n и вероятности P доверительного интервала.

Коэффициент Стьюдента находится из таблиц. Зная количество измерений n , и задавая вероятность доверительного интервала P .

Косвенные измерения

Часто в процессе проведения физических исследований нет специального прибора для измерения необходимой величины x , поэтому приходится проводить косвенные измерения.

Косвенными называются измерения, при которых искомая величина рассчитывается по какой - либо функциональной зависимости с применением результатов прямых измерений.

Косвенные измерения обычно проводятся в том случае, когда прямые измерения провести не удаётся (в основном из-за того, что нет соответствующего прибора или очень дорогостоящие)

Косвенные измерения можно обрабатывать двумя способами:

Первый способ: по методике обработки прямых измерений.

Ответ записывается в виде $x = \langle x \rangle \pm t_{p,k} S_{\langle x \rangle}$.

Второй способ: с помощью частных производных.

Ответ записывается в виде $x = \langle x \rangle \pm S_x$.

Совместные измерения

Совместными называются измерения, при которых одновременно определяются значения функции y и значения аргументов x .

Совместные измерения проводятся для определения неизвестных коэффициентов A , B и т.д. в какой-либо функциональной зависимости (например, в уравнении $y = Ax$ необходимо найти коэффициент A ,

а в уравнении $y = Ax + B$ необходимо определить коэффициенты A и B).

После определения неизвестных коэффициентов A и B можно будет проводить косвенные измерения.

4. В чём заключается идея метода наименьших квадратов

Этот критерий в математической статистике получил название **критерия наименьших квадратов**.

Суть этого метода заключается в следующем. Необходимо определить параметр A таким образом, чтобы выполнялись следующие требования:

1. Прямая $y = A \cdot x$ должна проходить так, чтобы экспериментальные точки располагались по обе стороны от этой прямой.
2. Отклонения Δ_i каждого i -го экспериментального значения y_i от нашей прямой $y = A \cdot x$ (то есть $\Delta_i = y_i - A \cdot x_i$) должны удовлетворять следующему критерию: *угловой коэффициент A искомой нами прямой $y = A \cdot x$ должен быть таким, чтобы сумма квадратов отклонений Δ_i^2 от теоретической прямой $y = A \cdot x$ была минимальной.*