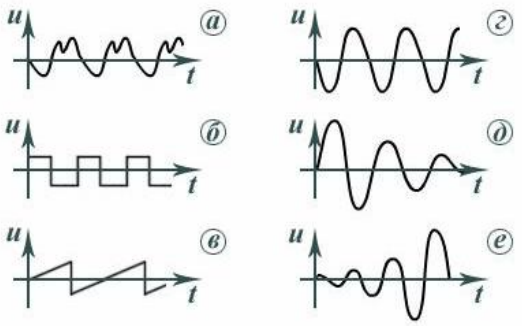
Тема: Механические и электромагнитные колебания



Колебаниями *называются движения или процессы, характеризующиеся определенной повторяемостью во времени.*

Колебательные процессы широко распространены в природе и технике, например, качание маятника часов, переменный электрический ток и т. д.

При колебательном движении маятника изменяется координата его центра масс, в случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи.

Физическая природа колебаний может быть разной, поэтому различают *механические* и *электромагнитные* колебания.

Механическими колебаниями называются механические движения тела, повторяющиеся с течением времени.

(например, колебания маятника, биение сердца и т.п.)

Электромагнитными колебаниями называются повторяющиеся со временем изменения элекртического и магнитного полей, происходящие в колебательном контуре.

Условия необходимые для возникновения колебаний в системе

1. Наличие в системе положения устойчивого равновесия.
2. Возникновение результирующей силы, направленной к положению устойчивого равновесия, при отклонении системы из положения равновесия, величина которой прямо пропорциональна отклонению системы.
3. Силы трения и сопротивления в системе должны быть малы.

Маятники

Маятником называется твёрдое тело, совершающее механические колебания около неподвижной оси.

Например:

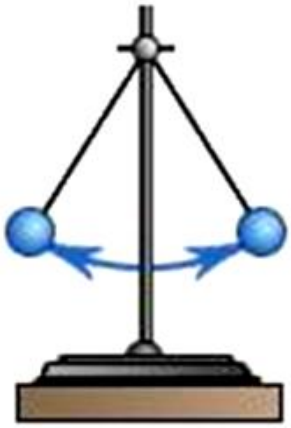
- математический маятник,
- физический маятник,
- пружинный маятник,
- оборотный маятник и др.

Периодом колебаний T (тэ) называется время одного полного колебания (то есть это время, через которое система возвращается в исходное состояние).

$[T] = c$, секунда.

Если сил трения и сопротивления в системе нет, то период колебаний T можно определить по следующим формулам.

Математический маятник



Математическим маятником называется идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити, совершающей колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

(хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити)

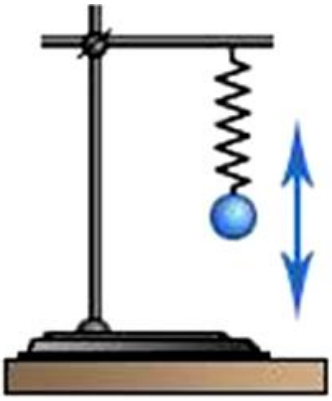
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ - период колебаний математического маятника,

где

l - длина нити маятника, $м$;

g - ускорение свободного падения, $\frac{м}{c^2}$.

Пружинный маятник



Пружинным маятником называется система, состоящая из грузика массой m, прикреплённого к абсолютно упругой невесомой пружине, совершающего колебания под действием упругой силы вида $F = -kx$,

где k - коэффициент жёсткости пружины, $[k] = \frac{Н}{м}$;

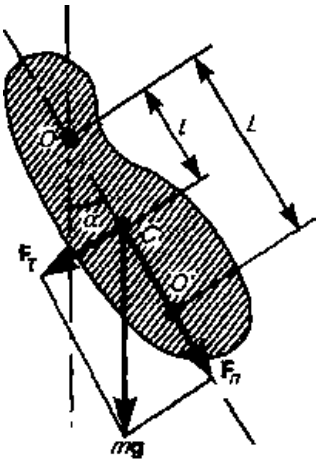
x - величина деформации пружины, $м$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ - период колебаний пружинного маятника,

где

k - коэффициент жёсткости пружины, $\frac{Н}{м}$; m - масса грузика, $кг$.

Физический маятник



Физическим маятником называется твёрдое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания в вертикальной плоскости вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$ - период колебаний физического маятника,

где

l - расстояние от центра масс маятника C до оси качания O, $м$;

I - момент инерции маятника относительно оси качания, $кг \cdot м^2$;

g - ускорение свободного падения, $\frac{м}{с^2}$; m - масса маятника, $кг$.

Величина $L = \frac{I}{mg}$ называется ***приведенной длиной физического маятника*** (т.е. это длина такого математического маятника $l_{математического}$, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника, то есть $L = l_{математического}$).

Оборотный маятник

Оборотным маятником называется массивное твёрдое тело с двумя перемещающимися вдоль оси маятника трехгранными ножами, способное совершать колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести вокруг каждого из ножей .
(*Оборотный маятник используется для экспериментального определения ускорения свободного падения* g).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$ - период колебаний оборотного маятника.

где

L - приведённая длина оборотного маятника, (она равна расстоянию между ножами оборотного маятника, когда период колебаний маятника на каждом из ножей одинаков), $м$.

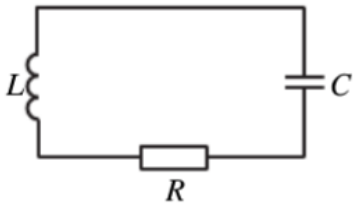
g - ускорение свободного падения, $\frac{м}{с^2}$.

Колебательный контур

Колебательным контуром называется электрическая цепь, состоящая из конденсатора ёмкостью С, катушки индуктивностью L и резистора сопротивлением R.

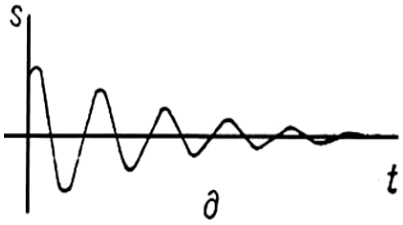
Различают *реальный* и *идеальный* колебательные контура.

Реальный колебательный контур

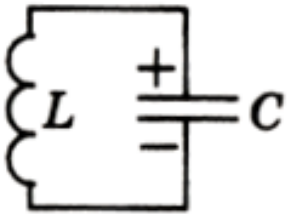


- электрическая схема реального колебательного контура.

Реальный колебательный контур обладает активным сопротивлением ($R \neq 0$), на котором происходит тепловые потери при прохождении по нему тока, в результате чего в реальном колебательном контуре происходят затухающие электромагнитные колебания.

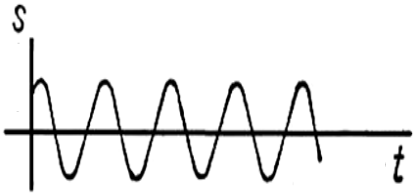


Идеальный колебательный контур



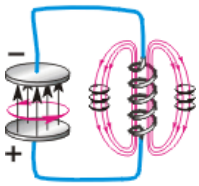
- электрическая схема идеального колебательного контура.

В идеальном колебательном контуре нет активного сопротивления ($R = 0$). Из-за отсутствия тепловых потерь на этом сопротивлении, в идеальном колебательном контуре происходят незатухающие электромагнитные колебания.



В колебательном контуре заряд конденсатора периодически то увеличивается, то уменьшается. Значит, существующее между его пластинами *электрическое поле периодически изменяется:* то усиливается, то ослабевает. С такой же частотой меняется сила тока в катушке индуктивности, следовательно, и *магнитное поле периодически изменяется:* то усиливается, то ослабевает.

Электромагнитные колебания происходят в результате периодической перезарядки конденсатора и возникновения ЭДС электромагнитной индукции в катушке индуктивности.



В колебательном контуре совершают колебания:

1. энергия электрического поля конденсатора $W_{ЭП}$ и энергия магнитного поля катушки $W_{МП}$,
2. заряд q и напряжение u на конденсаторе,
3. сила тока i в цепи.

Если конденсатор зарядить и замкнуть на катушку, то по катушке потечет ток разряда конденсатора. Сила тока не сразу достигает максимального значения, а увеличивается постепенно. Это обусловлено явлением самоиндукции в катушке.

В момент, когда конденсатор полностью разрядится, энергия электрического поля конденсатора станет равной нулю. Энергия же тока (энергия магнитного поля катушки) согласно закону сохранения энергии будет максимальной. Следовательно, в этот момент сила тока также достигнет максимального значения

Несмотря на то, что к этому моменту разность потенциалов на концах катушки становится равной нулю, электрический ток не может прекратиться сразу. Этому препятствует явление самоиндукции. Как только сила тока и созданное им магнитное поле начнут уменьшаться, возникает вихревое электрическое поле, которое направлено по току и поддерживает его.

Индукционный ток, в соответствии с правилом Ленца, теперь будет течь в ту же сторону что и спадающий ток разряда конденсатора и перезарядит конденсатор.

В результате конденсатор перезаряжается до тех пор, пока ток, постепенно уменьшаясь, не станет равным нулю.

Энергия магнитного поля в этот момент также будет равна нулю, а энергия электрического поля конденсатора опять станет максимальной.

Когда ток прекратится, процесс повторится в обратном направлении.

Электромагнитные колебания в колебательном контуре сопровождаются взаимными превращениями электрического и магнитного полей.

Период электромагнитных колебаний

Периодом колебания T называется наименьший промежуток времени, через который колебания в точности повторяются. $[T] = c$, секунда.

Линейной частотой колебаний ν (или просто ***частотой колебаний***) называется величина обратная периоду колебаний, то есть $\nu = \frac{1}{T}$; $[\nu] = \frac{1}{c} \equiv Гц$, Герц.

(частота колебаний ν показывает число полных колебаний, совершаемых системой за одну секунду)

$50\ Гц$ – это частота периодического колебания, при которой за 1 с совершается 50 полных колебаний.

- ***Условный период электромагнитных колебаний*** T *в реальном колебательном контуре* можно определить по формуле:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC}\right)^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}},$$

где R - активное сопротивление контура, *Ом*,

L (эль) - индуктивность контура (это индуктивность катушки), *Гн*, Генри;

C (цэ) - ёмкость контура (электрическая ёмкость конденсатора), *Ф*, Фарад;

ω (омега) - циклическая частота затухающих колебаний;

ω_0 - собственная циклическая частота (частота незатухающих колебаний), *рад*;

β (бэта) - коэффициент затухания, $\frac{1}{c}$.

- ***Период электромагнитных колебаний*** T *в идеальном колебательном контуре* можно определить по формуле *Томсона*:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

где L (эль) - индуктивность контура (это индуктивность катушки), *Гн*, Генри;

C (цэ) – ёмкость контура (электрическая ёмкость конденсатора), *Ф*, Фарад;

Причём,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Гармонические колебания и их характеристики

Гармоническими называются колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

или

$$x = A\sin(\omega_0 t + \alpha),$$

где

x (икс) - колеблющаяся величина (например, смещение маятника, заряд или напряжение на конденсаторе, сила тока в цепи и т.п.),

A (а) - амплитуда колебания (то есть максимальное отклонение колеблющейся величины от положения равновесия),

ω_0 (омега нулевое) - круговая или циклическая частота колебаний, $\frac{рад}{с}$;

φ (фи) (или α (альфа)) - начальная фаза колебания, $рад$ (радиан),

(это фаза колебания в начальный момент времени $t = 0$ с, она определяет значение колеблющейся величины в момент времени $t = 0$ с),

$\Phi = (\omega_0 t + \varphi)$ - фаза колебаний в произвольный момент времени t, $рад$;

(фаза колебания определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени t).

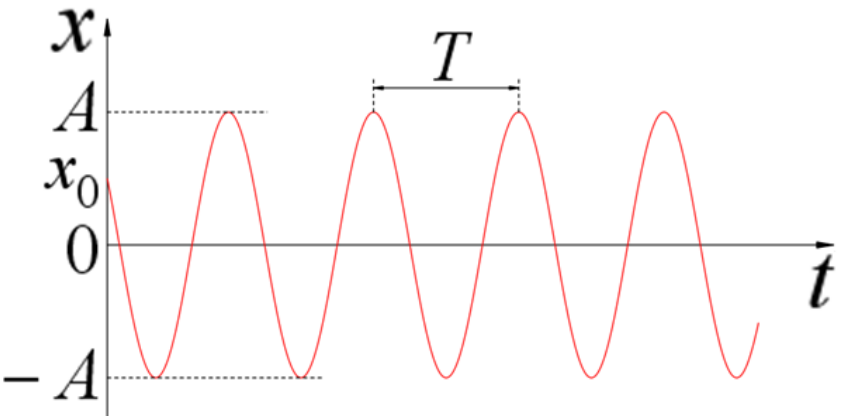
Так как косинус изменяется в пределах от +1 до -1, то x может принимать значения от $+A$ до $-A$).

Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам:

1) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, близкий к гармоническому,

2) различные периодические процессы (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить в виде суммы гармонических колебаний разной частоты и амплитуды (разложение в ряд Фурье).

График гармонических колебаний



По графику гармонических колебаний можно определить период колебаний T (см. рис), а, следовательно, линейную частоту колебаний $\nu = \frac{1}{T}$ и циклическую частоту $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Так же можно определить амплитуду колебаний A (см. рис) и начальную фазу φ. Для этого из рис. для момента времени $t = 0c$ определяем x_0. В этом случае уравнение гармонических колебаний будет иметь вид

$$x_0 = A\cos\varphi.$$

Следовательно, $\cos\varphi = \frac{x_0}{A}$ или $\varphi = \arccos\frac{x_0}{A}$.

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики.

Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам:

1) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, близкий к гармоническому,

2) различные периодические процессы (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить в виде суммы гармонических колебаний разной частоты и амплитуды (разложение в ряд Фурье).

Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники при малых амплитудах колебаний и электрический колебательный контур (для токов и напряжений столь малых, при которых элементы контура можно считать линейными).

Кинематика механических колебаний

Пусть координата маятника изменяется по закону $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. (1)

Тогда:

- скорость v маятника при гармонических колебаниях можно найти по формуле:

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}). \quad (2)$$

Ускорение a маятника при гармонических колебаниях можно найти по формуле:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) видно, что скорость v и ускорение a так же изменяются со временем по гармоническому закону с амплитудами, равными

$$v_{\max} = A\omega_0 \quad \text{и} \quad a_{\max} = A\omega_0^2.$$

Из сравнения (1) с (2) и (3) видно, что скорость v отличается по фазе от смещения x на π/2, а ускорение a отличается по фазе от смещения x на π.

Следовательно, в моменты времени, когда смещение тела равно нулю $x = 0$, скорость v достигает наибольшего значения $v_{\max} = A\omega_0$.

Когда же смещение x достигает максимального значения $x = x_{\max}$, то скорость маятника становится равным нулю $v = 0$, а ускорение достигает наибольшего значения $a_{\max} = A\omega_0^2$.

Динамика механических колебаний

Согласно второму закону Ньютона, результирующая сила, действующая на маятник равна:

$$F_x = ma = -m\omega_0^2 x.$$

Следовательно, результирующая сила пропорциональна смещению маятника из положения равновесия и направлена в противоположную сторону смещения (то есть к положению равновесия).

Кинетическая энергия маятника W_K, совершающего гармонические колебания, с учётом уравнения (2), равна

$$W_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} sin^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) \quad (4)$$

Потенциальная энергия маятника $W_П$, совершающего гармонические колебания, с учётом уравнения (1), равна

$$W_П = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2\left(\omega_0 t + \varphi\right) \quad (5)$$

Сложив (4) и (5), получим формулу для полной механической энергии маятника:

$$E = W_K + W_П = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

Следует обратить внимание на то, что кинетическая W_K и потенциальная $W_П$ энергия при колебаниях маятника изменяются с частотой в два раза большей, чем колеблется сам маятник, то есть с частотой $2\omega_0$.

Превращение энергии при гармонических колебаниях

При отклонении математического маятника от положения равновесия его потенциальная энергия увеличивается (увеличивается расстояние до Земли).

При движении к положению равновесия скорость маятника возрастает, и увеличивается кинетическая энергия, за счет уменьшения запаса потенциальной энергии.

В положении равновесия кинетическая энергия – максимальная, потенциальная – минимальна. В положении максимального отклонения – наоборот.

С пружинным маятником – то же самое, но берется не потенциальная энергия в поле тяготения Земли, а потенциальная энергия деформированной пружины.

Законы сохранения энергии при гармонических колебаниях

При гармонических колебаниях математического, физического и пружинного маятников выполняется закон сохранения полной механической энергии.

В случае колебаний математического маятника

Так как сопротивления воздуха нет, на тело действует только консервативная сила тяжести, а сила натяжения нити работу не совершает, то для математического маятника будет выполняться закон сохранения полной механической энергии, то есть в любых двух точках траектории маятника будет справедливо равенство: $mgh_1 + \frac{m\,v_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{m\,v_2^2}{2} = mgh_{мах} = \frac{m\,v_{мах}^2}{2}$,

где m - масса грузика, *кг*;

v - скорость грузика в какой-то момент времени, *м/с*;

h - высота грузика над нулевым уровнем отсчёта потенциальной энергии, *м*.

Если тело начинает колебание из состояния покоя с какой-то высоты $h_{мах}$, то в начальный момент времени она обладает максимальной потенциальной энергией $W_П^{мах} = mgh_{мах}$, а кинетическая энергия равна нулю (так как скорость тела в этот момент равен нулю). При колебании потенциальная энергия будет уменьшаться (так как высота уменьшается, а кинетическая энергия будет возрастать (так как будет увеличиваться скорость тела). В момент прохождения маятником положения равновесия вся его потенциальная энергия перейдёт в кинетическую, причём будет выполняться равенство

$$mgh_{мах} = \frac{m\,v_{мах}^2}{2}.$$

В случае колебаний физического маятника

Так как сопротивления воздуха нет, на тело действует только консервативная сила тяжести, а сила реакции опоры со стороны подвеса работу не совершает (так как перемещение точки приложения силы реакции опоры равно нулю), то для физического маятника будет выполняться закон сохранения полной механической энергии, то есть в любых двух точках траектории маятника будет справедливо равенство:

$$\frac{I\omega_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{I\omega_2^2}{2} + mgh_2 = \frac{I\omega_{max}^2}{2} = mgh_{max},$$

где I - момент инерции маятника относительно оси колебаний, $кг \cdot м^2$ (определяется по теореме Штейнера),

ω - угловая скорость маятника в какой-то момент времени, *рад/с*;

h - высота грузика над нулевым уровнем отсчёта потенциальной энергии, *м*.

Если тело начинает колебание из состояния покоя с какой-то высоты $h_{мах}$, то в начальный момент времени она обладает максимальной потенциальной энергией $W_П^{мах} = mgh_{мах}$, а кинетическая энергия равна нулю (так как скорость тела в этот момент равен нулю). При колебании потенциальная энергия будет уменьшаться (так как высота уменьшается, а кинетическая энергия будет возрастать (так как будет увеличиваться скорость тела). В момент прохождения маятником положения равновесия вся его потенциальная энергия перейдёт в кинетическую, причём будет выполняться равенство

$$mgh_{мах} = \frac{I\omega_{\max}^2}{2}.$$

В случае колебаний пружинного маятника

Так как сопротивления воздуха нет и в системе действуют только консервативные сила тяжести и сила упругости, то для пружинного маятника будет выполняться закон сохранения полной механической энергии, то есть в любых двух точках траектории маятника будет справедливо равенство:

$$\frac{\kappa x_1^2}{2}+\frac{m\,v_1^2}{2}=\frac{\kappa x_2^2}{2}+\frac{m\,v_2^2}{2}=\frac{\kappa x_{мах}^2}{2}=\frac{m\,v_{мах}^2}{2},$$

где m - масса грузика, *кг*;

v - скорость грузика в какой-то момент времени. *м/с*;

k - коэффициент жёсткости пружины, *Н/м*;

x - величина деформации пружины в какой-то момент времени, *м*.

Если маятник начинает колебание из состояния покоя с какой-то величиной деформации $x_{мах}$, то в начальный момент времени она обладает максимальной потенциальной энергией $W_П^{мах}=\frac{\kappa x_{мах}^2}{2}$, а кинетическая энергия равна нулю (так как скорость тела в этот момент равен нулю). При колебании потенциальная энергия будет уменьшаться (так как высота уменьшается, а кинетическая энергия будет возрастать (так как будет увеличиваться скорость тела).

В момент прохождения маятником положения равновесия вся его потенциальная энергия перейдёт в кинетическую, причём будет выполняться равенство $\frac{\kappa x_{мах}^2}{2}=\frac{m\,v_{мах}^2}{2}$.

Превращение электромагнитной энергии в колебательном контуре

Если активное сопротивление колебательного контура равно нулю ($R=0$), то для него будет выполняться ***закон сохранения электромагнитной энергии***, то есть в любые два момента времени будет справедливо равенство:

$$\frac{Cu_1^2}{2}+\frac{Li_1^2}{2}=\frac{Cu_2^2}{2}+\frac{Li_2^2}{2}=\frac{CU_{мах}^2}{2}=\frac{LI_{мах}^2}{2},$$

где C - ёмкость колебательного контура, *Ф*;

L - индуктивность колебательного контура, *Гн*;

u - напряжение на конденсаторе в какой-то момент времени, *В*;

i - сила тока в цепи в какой-то момент времени, *А*;

$U_{мах}$ - амплитудное значение напряжения на конденсаторе, *В*;

$I_{мах}$ - амплитудное значение силы тока в цепи, *А*.

Если сопротивление колебательного контура равно нулю и колебания начинаются из состояния, при котором напряжение на конденсаторе равно $U_{мах}$, то в начальный момент времени он обладает максимальной энергией электрического поля $W_{ЭП}^{мах}=\frac{CU_{мах}^2}{2}$, а энергия магнитного поля равна нулю (так как ток в контуре в этот момент равен нулю). При колебании энергия электрического поля конденсатора будет уменьшаться (так как напряжение уменьшается, а энергия магнитного поля катушки индуктивности будет возрастать (так как будет увеличиваться ток в контуре). В момент полной разрядки конденсатора вся энергия электрического поля перейдёт в магнитную энергию, причём будет выполняться равенство:

$$\frac{CU_{мах}^2}{2}=\frac{LI_{мах}^2}{2}.$$

Дифференциальное уравнение свободных колебаний и его решение

Свободными (или ***собственными***) называются колебания, возникающие в системе под действием внутренних сил после того, как система была выведена из положения устойчивого равновесия, и происходящие за счёт сообщённой системе энергии, которая в дальнейшем не пополняется. (например: колебания маятника)

Незатухающими называются колебания, амплитуда которых не изменяется с течением времени.

Затухающие колебания называются колебания, амплитуда которых уменьшается с течением времени.

Периодическими называются колебания, которые в точности повторяются через определённый промежуток времени, называемый периодом колебаний T.

Дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0, \qquad (6)$$

где x - колеблющаяся величина (например, смещение тела от положения равновесия x, заряд q или напряжение u на конденсаторе, сила тока i в колебательном контуре и т.п.);

$\frac{d^2x}{dt^2}$ - вторая производная колеблющейся величины x по времени;

ω_0 - собственная циклическая частота колебаний, $\frac{рад}{с}$.

Решение уравнения (6) имеет вид:

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

или

$$x=A\sin(\omega_0 t+\alpha),$$

То есть, дифференциальное уравнение (6) описывает гармонические колебания.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0 \qquad (7)$$

где x (икс) - колеблющаяся величина, описывающая тот или иной физический процесс;

β (бэта) - коэффициент затухания, $\frac{1}{с}$;

- $\beta=\frac{r}{2m}$ - в случае механических колебаний, $\frac{1}{с}$,

где r (эр) - коэффициент сопротивления, $\frac{кг}{с}$; m - масса системы, $кг$.

- $\beta=\frac{R}{2L}$ - в случае электромагнитных колебаний, $\frac{1}{с}$,

где R (эр) - активное сопротивление колебательного контура, *Ом*;
L (эль) - индуктивность колебательного контура, *Гн*.

ω_0 (омега нулевое) - собственная циклическая частотой колебательной системы, $\frac{рад}{с}$

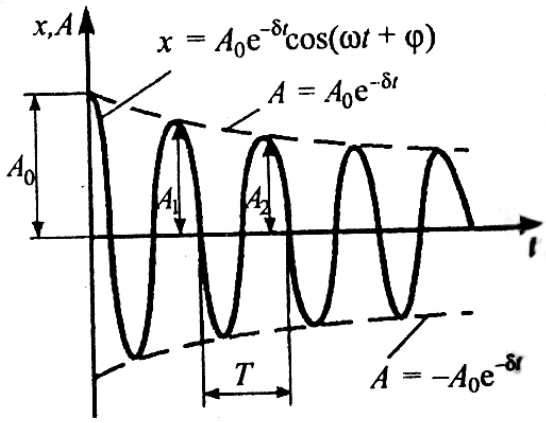
(то есть частота свободных незатухающих колебаний системы при $\beta=0$ (при отсутствии потерь энергии).

Если в системе есть силы трения и сопротивления, такие, что выполняется условие $\beta^2\geq\omega_0^2$, то колебания в системе очень быстро затухают.

Если же в системе силы трения и сопротивления малы, такие, что выполняется условие $\beta^2 << \omega_0^2$, то в системе происходят слабо затухающие колебания, и решение уравнения (9) имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad (8)$$

где $A = A_0 e^{-\beta t}$ - амплитуда затухающих колебаний, (9)



A_0 - начальная амплитуда (амплитуда колебаний в момент времени $t = 0c$).

На рисунке сплошной линией показан график затухающих колебаний, которые описываются уравнением (8), а пунктирной линией зависимость уменьшения амплитуды затухающих колебаний, которая описывается уравнением (9).

Временем релаксации τ (тау) называется промежуток времени, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в $e = 2.7$ раз:

$$\tau = \frac{1}{\beta}.$$

$[\tau] = c$.

Затухание нарушает периодичность колебаний, поэтому затухающие колебания не являются периодическими и, строго говоря, к ним неприменимо понятие периода или частоты. Однако если затухание мало, то пользуются понятием ***условного периода*** как промежутка времени между двумя последующими максимумами (или минимумами) колеблющейся физической величины.

Условным периодом T затухающих колебаний называется величина, равная

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Для характеристики быстроты уменьшения амплитуды колебаний с течением времени ввели понятие *декремента затухания* $Д$ (дэ).

Декрементом затухания $Д$ называется скалярная величина, равная отношению амплитуды колебаний в какой-либо произвольный момент времени $A(t)$, к величине амплитуды колебаний через один условный период $A(t+T)$:

$$Д = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}.$$

$[Д]$ = безразмерная.

Обычно на практике пользуются более удобной величиной, которая называется *логарифмическим декрементом затухания* λ (лямбда).

Логарифмическим декрементом затухания λ называется скалярная величина, равная натуральному логарифму от декремента затухания $Д$:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T.$$

$[\lambda]$ = безразмерная.

Логарифмическим декрементом затухания можно расчитать ещё по следующим формулам:

$$\lambda = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}.$$

где N_e (эн е) - число колебаний, совершаемых за время, когда амплитуда колебаний уменьшается в $e = 2.7$ раз.

Логарифмический декремент затухания λ - постоянная для данной колебательной системы величина.

Добротностью колебательной системы Q (ку) называется скалярная величина равная произведению 2π на отношение энергии колебательной системы в произвольный момент времени $W(t)$ к убыли энергии системы за один условный период $W(t) - W(t+T)$:

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}.$$

Если затухание в системе мало (то есть выполняется условие $\beta^2 << \omega_0^2$), то добротность колебательной системы можно определить по формулам:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e = \frac{\pi}{\beta T_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} \qquad (10)$$

(так как затухание мало, то T принято равным T_0).

Из формулы (10) следует, что добротность пропорциональна числу колебаний N_e, совершаемых системой за время релаксации.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Резонанс

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии. Такая компенсация возможна с помощью какого-либо внешнего периодического воздействия, например, изменяющего по гармоническому закону:

$$X(t) = X_0 \cos \Omega t.$$

Вынужденными называются колебания, происходящие под влиянием изменяющихся со временем внешних периодических воздействий.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f \cos \Omega t, \qquad (11)$$

Решение уравнения (11) равно сумме общего решения (8) однородного уравнения (7) и частного решения неоднородного уравнения:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) + A(\Omega) \cos(\Omega t + \alpha), \qquad (12)$$

где

- $f = \frac{F_{max}}{m}$ - в случае механических колебаний,

где F_{max} - амплитудное значение силы, действующей на систему, *Н*:

m - масса колебательной системы, *кг*.

- $f = \frac{U_{max}}{L}$ - в случае электромагнитных колебаний,

где U_{max} - амплитудное значение напряжения в колебательном контуре, *В*;

L - индуктивность контура, *Гн*.

График вынужденных колебаний приведён на рис. 1

Первое слагаемое в уравнении (12) играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при так называемом, ***установлении колебаний*** (см. рис. 1).

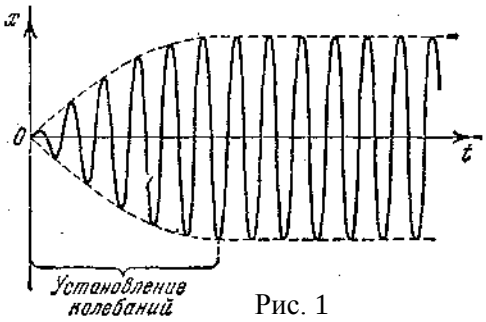


Рис. 1

С течением времени из-за множителя $e^{-\beta t}$ роль первого слагаемого быстро уменьшается и по прошествии достаточного времени t оно стремится к нулю.

Таким образом, через некоторое время t, колебание системы определяется величиной внешнего воздействия.

Следовательно, второе слагаемое в уравнении (12) описывает установившиеся вынужденные колебания, которые представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающих возмущений Ω.

Амплитуду вынужденных колебаний можно определить по формуле

$$A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \qquad (13)$$

а начальную фазу вынужденных колебаний - по формуле

$$\alpha = arctg\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \qquad (14)$$

Явление резонанса

Из анализа уравнения (14) следует, что вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания зависит от частоты вынужденных возмущений Ω.

А из анализа уравнения (13) следует, что амплитуда вынужденных колебаний $A(\Omega)$ так же зависит от частоты вынужденных возмущений Ω. Причём, амплитуда колебаний будет достигать своего максимального значения при, так называемой, резонансной частоте $\Omega_{рез}$, которую можно определить по формуле:

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \qquad (15)$$

Резонансом называется явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний $A(\Omega)$ при приближении частоты вынуждающих возмущений Ω к величине резонансной частоты $\Omega_{рез}$.

При $\beta^2 << \omega_0^2$ значение $\Omega_{рез}$ практически совпадает с собственной частотой ω_0 колебательной системы.

Подставляя (15) в формулу (13), получим величину амплитуды колебаний системы во время резонанса:

$$A_{рез} = \frac{f}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Резонансные кривые

На рис. 2 приведены зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающих возмущений Ω при различных значениях коэффициента затухания системы β

(эта совокупность кривых называется ***резонансными кривыми)***.

На этом рисунке:

- кривые 1, 2, 3 – это резонансные кривые при коэффициентах затухания $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$.

Из рис. 2 видно, что

- чем меньше коэффициент затухания β, тем выше и правее лежит максимум резонансной кривой;

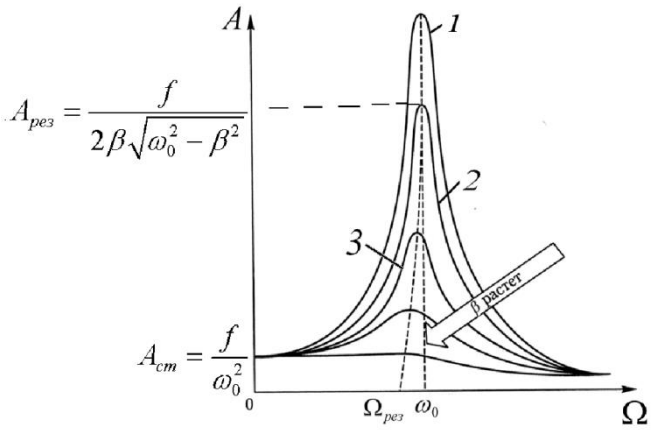


Рис. 2

- при стремлении частоты вынуждающих возмущений к нулю, то есть $\Omega \to 0$, все кривые стремятся к одному и тому же, предельному значению $A_{ст} = \dfrac{f}{\omega_0^2}$, которое называют ***статическим отклонением***;

- при резонансной частоте вынуждающих возмущений $\Omega_{рез}$ амплитуда колебаний достигает максимального значения, равного $A_{рез} = \dfrac{f}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$;

- при стремлении частоты вынуждающих возмущений к бесконечности, то есть $\Omega \to \infty$, все кривые асимптотически стремятся к нулю.

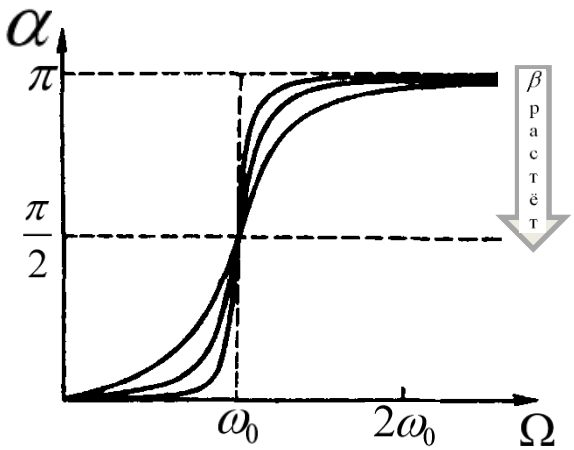


Рис. 3

Из выражения (14) следует, что если затухание в системе отсутствует ($\beta = 0$), то только в этом случае колебания и вынуждающая сила имеют одинаковые фазы. Во всех других случаях $\alpha \neq 0$. Зависимость α от Ω при разных коэффициентах β графически представлена на рис. 3, из которого следует, что при изменении Ω изменяется и сдвиг фаз α. Из формулы (14) вытекает, что при $\Omega = 0$ $\alpha = 0$, а при $\Omega = \omega_0$ независимо от значения коэффициента затухания $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то есть сила опережает по фазе колебания на $\pi/2$.

При дальнейшем увеличении Ω сдвиг фаз α возрастает и при $\Omega >> \omega_0$, $\alpha \to \pi$, т.е. фаза колебаний почти противоположна фазе внешних воздействий.

Семейство кривых, изображенных на рис. 3, называется ***фазовыми резонансными кривыми***.

Явления резонанса могут быть как вредными, так и полезными. Например, при конструировании машин и различного рода сооружений необходимо, чтобы собственная частота их колебаний ω_0 не совпадала с частотой возможных внешних воздействий Ω, в противном случае возникнут вибрации, которые могут вызвать серьезные разрушения. С другой стороны, наличие резонанса позволяет обнаружить даже очень слабые колебания, если их частота совпадает с частотой собственных колебаний прибора. Так, радиотехника, прикладная акустика, электротехника используют явление резонанса.