

Тема: Основы квантовой статистики

Основные понятия и определения

Статистической физикой называется раздел молекулярной физики, который изучает свойства систем из большого числа частиц (атомов, молекул, электронов, фотонов и т.д.).

В зависимости от условий, частицы системы подчиняются либо законам классической, либо законам квантовой механики. Соответственно различают классическую и квантовую статистику.

Квантовой статистикой – называется раздел статистической физики, исследующий системы, которые состоят из огромного числа частиц, подчиняющихся законам квантовой механики.

Основная задача квантовой статистики состоит в нахождении функции распределения частиц по координатам, импульсам, энергиям и т.д., а также нахождении средних значений этих параметров. К таким системам относятся, например, системы тождественных элементарных частиц (электронов, фотонов и т.п.) при их взаимодействии друг с другом.

Тождественными называются частицы, обладающие одинаковыми физическими свойствами (массой, зарядом, спином и т.п.)

Основополагающим принципом квантовой статистики является **принцип неразличимости тождественных частиц**.

Он состоит в том, что экспериментально нельзя отличить тождественные частицы друг от друга. Специфика поведения элементарных частиц не позволяет абсолютно точно определить положение какой-либо отдельной частицы системы в пространстве, а позволяет рассчитать лишь вероятность нахождения этой частицы в какой-либо точке пространства.

Принцип неразличимости тождественных частиц является фундаментальным принципом квантовой механики и основан на соотношениях неопределённостей Гейзенберга.

Вырожденной называется система частиц, свойства которой существенным образом отличаются от свойств систем, подчиняющихся законам классической статистики.

Спин S

Наблюдения показывают, что каждая элементарная частица обладает собственным моментом импульса. Причём для каждого вида элементарных частиц он имеет строго определённое значение, то есть является таким же внутренним свойством элементарной частицы, как и её масса и заряд.

Так вот,

Спином S называется скалярная величина, определяющая величину собственного момента импульса элементарной частицы.

Спин элементарной частицы выражают в величинах кратных постоянной Дирака

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

Опыт показывает, что все элементарные частицы обладают

- либо целочисленным значением спина : $s = 0, \hbar, 2\hbar, \dots$,

- либо полуцелым значением спина : $s = \frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \dots$

Величина спина частицы определяет её поведение в системе тождественных себе частиц.

В зависимости от величины спина s , все частицы делятся на два класса: фермионы и бозоны.

Фермионы и бозоны

Фермионами называются частицы, обладающие полуцелым спином $s = \frac{1}{2}\hbar, \frac{3}{2}\hbar, \dots$

Такое название они получили потому, что системы, состоящие из таких частиц, подчиняются статистике Ферми-Дирака, развитой итальянским физиком *Э. Ферми* и английским физиком *П. Дираком*.

К фермионам относятся электроны, протоны, нейтроны, нейтрино и все элементарные частицы и античастицы с полуцелым спином.

Основная особенность фермионов состоит в том, что в коллективе тождественных себе частиц они подчиняются **принципу Паули**: *в данном квантовом состоянии может находиться не более одного фермиона*.

Принцип Паули позволяет объяснить особенности периодической системы химических элементов Менделеева, а, по сути, существование всех химических элементов, объясняет целый ряд закономерностей атомных и молекулярных спектров, а так же существование в природе проводников, полупроводников и диэлектриков.

Статистика Ферми-Дирака позволяет определить среднее число фермионов в данной системе в квантовом состоянии с энергией E_i . Это число определяется формулой:

$$f(E_i) = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} + 1} \text{ - распределение Ферми-Дирака (1926 г),}$$

где E_i - энергия фермиона, Дж; $f(E_i)$ - функция распределения фермионов по энергиям,

μ (мю) - химический потенциал вещества, Дж; $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ - постоянная Больцмана;

T - абсолютная температура; $e = 2,72$ - основание натурального логарифма.

- если $f(E_i) = 0$, то это означает, что фермионов с такой энергией в данной системе нет,

- если $f(E_i) = 1$, то это означает, что фермионы с такой энергией в данной системе есть, и этот уровень постоянно занят при данной температуре T ;

- если $0 < f(E_i) < 1$, то это число показывает, какую часть времени в среднем этот уровень будет занят фермионами при данной температуре T .

Бозонами называются частицы, обладающие нулевым или целочисленным спином $s = 0, \hbar, 2\hbar, \dots$

Такое название они получили потому, что системы, состоящие из таких частиц, подчиняются статистике Бозе -Эйнштейна, разработанной индийским физиком *Ш. Бозе* для фотонов и развитой *А. Эйнштейном* для других частиц.

К бозонам относятся фотоны, π - и K - мезоны, фононы в твёрдом теле, экситоны в полупроводниках и диэлектриках и все элементарные частицы и античастицы с целочисленным спином.

Основная особенность бозонов состоит в том, что в коллективе тождественных себе частиц с одной и той же энергией E_i может находиться любое число бозонов.

Статистика Бозе -Эйнштейна позволяет определить среднее число бозонов в данной системе в квантовом состоянии с энергией E_i . Это число определяется формулой:

$$f(E_i) = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{kT}} - 1} \text{ распределение Бозе -Эйнштейна (1924 г),}$$

где E_i - энергия бозона, Дж; $f(E_i)$ - функция распределения бозонов по энергиям,

μ (мю) – химический потенциал вещества, Дж; $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ - постоянная Больцмана;

T - абсолютная температура; $e = 2,72$ - основание натурального логарифма.

- если $f(E_i) = 0$, то это означает, что бозонов с такой энергией в данной системе нет,
- если $f(E_i) = 1$, то это означает, что бозоны с такой энергией в данной системе есть, и этот уровень постоянно занят при данной температуре T ;
- если $0 < f(E_i) < 1$, то это число показывает, какую часть времени в среднем этот уровень будет занят бозонами при данной температуре T .

Распределения Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна остаётся справедливой и в случае сложных частиц, состоящих из элементарных, таких, например, как атомные ядра, атомы, молекулы и т.д.

Ответ на вопрос, является ли сложная частица бозоном или фермионом, зависит от того, каков результирующий спин этой частицы. Если суммарный спин сложной частицы равен целому числу или нулю, то эта частица является **бозоном**, если же он равен полуцелому числу, то частица является **фермионом**.

Рассмотрим в качестве примера ядро атома гелия ${}^4_2\text{He}$, то есть α -частицу. Оно состоит из двух протонов и двух нейтронов - четырех ферми-частиц, спин каждой из которых равен $\frac{1}{2}$. Спин ядра ${}^4_2\text{He}$ равен нулю, то есть это ядро является бозоном. Атом гелия ${}^4_2\text{He}$, содержащий кроме ядра еще и два электрона (две ферми-частицы), также является бозоном. А вот ядро легкого изотопа гелия ${}^3_2\text{He}$ состоит из двух протонов и одного нейтрона, то есть нечетного числа (трех) ферми-частиц. Спин этого ядра полуцелый, следовательно, ядро ${}^3_2\text{He}$ является фермионом. Также фермионом является и атом ${}^3_2\text{He}$.

Различие между этими двумя изотопами гелия проявляется не только на микроскопическом, но и на макроскопическом уровне. Оно заключается в том, что жидкий изотоп гелия ${}^4_2\text{He}$ при температуре $T \sim 2$ К обладает сверхтекучими свойствами, а жидкий изотоп гелия ${}^3_2\text{He}$ таких свойств не проявляет.

Явление сверхтекучести у жидкого изотопа гелия ${}^4_2\text{He}$ было экспериментально открыто отечественным физиком *П.Л. Капицей* в 1937г и заключается в том, что жидкий гелий ${}^4_2\text{He}$ может протекать через узкие каналы и щели, не испытывая сил вязкости. Было показано, что сверхтекучесть может возникать только в системе бозонов и связана с образованием, так называемого, бозе-конденсата - накоплением большого числа бозе-частиц на самом нижнем энергетическом уровне.

Атомы легкого изотопа гелия ${}^3_2\text{He}$ являются ферми-частицами, поэтому первоначально казалось, что о сверхтекучести ${}^3_2\text{He}$ не может быть и речи. Однако впоследствии выяснилось, что при очень низких температурах $T \sim 0,002$ К атомы изотопа гелия ${}^3_2\text{He}$ объединяются в, так называемые, *куперовские пары*. Спин такой пары является целочисленным, то есть куперовская пара представляет собой бозе-частицу. Следовательно, и жидкий гелий ${}^3_2\text{He}$ в этих условиях может проявлять сверхтекучие свойства. Сверхтекучесть ${}^3_2\text{He}$ была экспериментально обнаружена в 1974 г.