Разбор задачи по динамике вращательного движения абсолютно твёрдого тела

Лёгкая нерастяжимая нить с прикреплённым к ней грузом массой 2000 г намотана на сплошной цилиндрический вал радиусом 100 мм. При разматывании нити груз опускается с ускорением 50 см/с^2. Определите массу и момент инерции вала. Силами трения в оси вала и сопротивлением воздуха пренебречь. Нить не проскальзывает по валу.

Ответ: $M = 76\,кг;\ I = 0.38\,кг \cdot м^2$

Дано:
$m = 2\,кг$
$a = 0.5\,\frac{м}{с^2}$
$r = 0.1\,м$
$v_0 = 0\,\frac{м}{с}$

$M - ?$
$I - ?$

Так как цилиндрический вал по условию задачи нельзя рассматривать как материальную точку, то для решения задачи воспользуемся схемой решения задач по динамике вращательного движения абсолютно твёрдого тела для цилиндрического вала и схемой решения задач по динамике поступательного движения для грузика.

СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ДИНАМИКУ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

1. Сделать чертёж к задаче, на котором нарисовать тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, и все силы, действующие на него, с учётом точек приложения сил.

а. так как тело поступательно не движется, следовательно, относительно центра масс тела выполняется условие: $\sum \vec{F}_i = 0$,

б. если тело вращается равномерно, то записать основное уравнение динамики вращательного движения тела в виде: $\sum M_{zi} = 0$,

в. если тело вращается равномерно, то записать основное уравнение динамики вращательного движения тела относительно оси вращения: $\sum M_{zi} = I_z \varepsilon$.

2. Решить полученную систему уравнений (при необходимости её дополняют уравнениями движения).

СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ДИНАМИКУ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1 Сделать чертеж к задаче, на котором:
- нарисовать все тела, рассматриваемые в задаче,
- нарисовать все силы, действующие на каждое тело, и, если возможно, указать направления ускорений каждого тела.

2. Для каждого тела записать первый закон Ньютона в виде $\sum \vec{F}_i = 0$, если тело движется без ускорения, или второй закон Ньютона в виде $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$, если тело движется с ускорением сначала в векторном виде, а затем в проекциях на оси координат, для чего:
- для каждого тела выбрать удобную систему координат (начало координат обычно помещают в центре тяжести тела, а одну из координатных осей направляют по вектору ускорения этого тела),
- для каждого тела расписывают своё векторное уравнение в проекциях на каждую ось с учётом знаков проекций сил.
(если направление вектора силы совпадает с положительным направлением оси координат, то его проекция имеет знак плюс, если направление силы не совпадает с направлением оси, то её проекция отрицательна, а если вектор силы направлен перпендикулярно оси, то его проекция на эту ось равна нулю).

3. Решить полученную систему уравнений.
(необходимо помнить, что число уравнений должно быть равно числу неизвестных. Если уравнений динамики окажется не достаточно, то полученную систему дополняют уравнениями кинематики или законами изменения и сохранения).

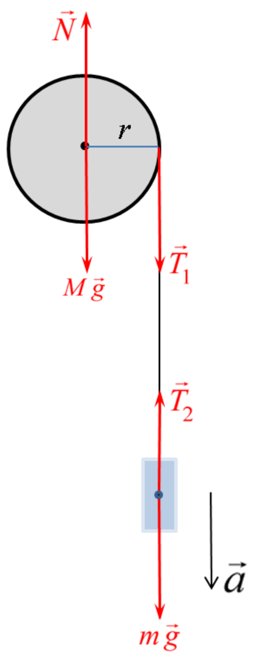

Рис. 1

Итак, преступаем к решению задачи. Для этого сначала сделаем рисунок к задаче, на котором нарисуем все тела, рассматриваемые в ней и силы, действующие на каждое тело (в нашем случае на вал и грузик).

Теперь запишем уравнения динамики для каждого тела. Так как вал вращается вокруг неподвижной оси, то для него необходимо записать основное уравнение динамики вращательного движения, а для грузика, который движется поступательно, запишем основное уравнение динамики поступательного движения.

Уравнение динамики вращательного движения для блока вокруг неподвижной оси вращения Z:

$$M_{Mg_z} + M_{N_z} + M_{T_{1z}} = I\varepsilon . \tag{1}$$

Уравнение динамики поступательного движения для груза:

$$\vec{T}_2 + m\vec{g} = m\vec{a} . \tag{2}$$

Теперь необходимо выбрать удобную систему координат для каждого тела, чтобы на них спроектировать уравнения (1) и(2).

Согласно пункта 2 схемы решения задач для каждого тела выберем свою систему координат. Начало координат для груза поместим в его центр тяжести и направим ось OY по направлению ускорения тела $\vec{a}$ (то есть вертикально вниз).

Направление оси вращения Z выберем с учётом направления вращения вала с помощью правила буравчика:

Если буравчик установить вдоль оси Z и вращать рукоятку буравчика по направлению вращения вала, то поступательное движение буравчика покажет положительное направление оси Z.

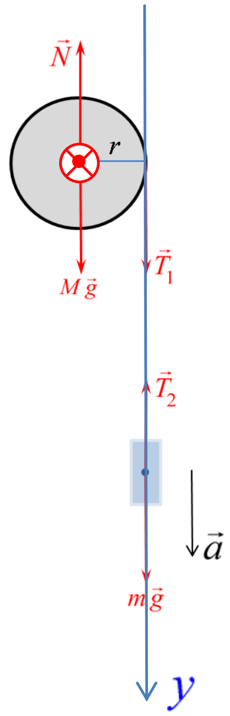

Рис. 2

Проектируем уравнение (1) на ось Z с учётом знаков проекций моментов сил:

$$Mgd_1 + Nd_2 + T_1d_3 = I\varepsilon. \quad (3)$$

Из рис.2 следует, что плечо силы тяжести $d_1 = 0$ и силы реакции со стороны оси $d_2 = 0$, так как линия действия этих сил проходит через ось вращения Z. А плечо силы натяжения равно радиусу вала $d_3 = r$.

По условию задачи вал представляет собой однородный цилиндр, поэтому момент инерции вала I относительно оси вращения Z будет равен $I = \dfrac{Mr^2}{2}$, а угловое ускорение вала ε распишем через тангенциальное ускорение a_τ точек на ободе вала : $\varepsilon = \dfrac{a_\tau}{r}$.

Тогда уравнение (3) примет вид: $0 + 0 + T_1r = \dfrac{Mr^2}{2}\dfrac{a_\tau}{r}$ и, окончательно,

$$T_1 = \frac{Ma_\tau}{2}. \quad (4)$$

Проектируем уравнение (2) на ось Oy с учётом знаков проекций сил:

$$mg - T_2 = ma. \quad (5)$$

У нас получилась система из двух уравнений (4) и (5) с четырьмя неизвестными величинами T_1, T_2, a и a_τ. Поэтому необходимо найти ещё два уравнения связи между этими неизвестными величинами. Для этого проанализируем более подробно условие задачи.

Так как нить невесома, то из анализа второго закона Ньютона можно получить, что $\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right| = T$. Докажем это.

Запишем уравнение динамики для кусочка нити массой Δm. Так как нить по условию задачи нерастяжима, то любая её часть будет двигаться с таким же ускорением $\vec{a}$, как и грузик. На кусочка нити массой Δm с двух сторон действуют силы натяжения $\vec{T}_1'$ и $\vec{T}_2'$ и сила тяжести $\Delta m\vec{g}$, тогда по второму закону Ньютона имеем: $\vec{T}_1' + \vec{T}_2' + \Delta m\vec{g} = \Delta m\vec{a}$ и в проекциях на ось Oy получим:

$$T_1' - T_2' + \Delta mg = \Delta ma.$$

Так как нить невесома, следовательно, $\Delta m = 0$ и тогда получим, что $T_1' - T_2' = 0$ и, следовательно, $T_1' = T_2' = T$.

Теперь необходимо связать тангенциальное ускорение a_τ с ускорением груза a.

По условию нить нерастяжима и не проскальзывает по валу при движении груза. Отсюда следует, что ускорение точек на ободе вала будет таким же, как и ускорение груза, то есть $a_\tau = a$.

С учётом анализа задачи получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} T = \dfrac{Ma}{2} & (6) \\ mg - T = ma & (7) \end{cases}$$

В этой системе два уравнения с двумя неизвестными. Теперь можно её решить.

Подставим (6) в (7): $mg - \dfrac{Ma}{2} = ma, \quad \Rightarrow, \quad \dfrac{Ma}{2} = mg - ma, \quad \Rightarrow,$

$$M = \frac{2m(g-a)}{a}. \quad (8)$$

Решив уравнение (8), получим: $M = \dfrac{2\cdot 2кг\left(10\dfrac{м}{c^2} - 0.5\dfrac{м}{c^2}\right)}{0.5\dfrac{м}{c^2}} = 76\,кг.$

Так как момент инерции вала $I = \dfrac{Mr^2}{2}$, то окончательно получим: $I = \dfrac{76\,кг\cdot(0.1м)^2}{2} = 0.38\,кг\cdot м^2$.

Ответ: $M = 76\,кг;\ I = 0.38\,кг\cdot м^2$