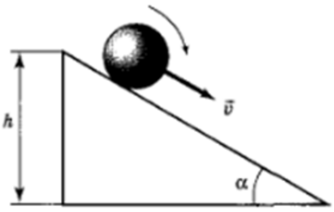
С наклонной плоскости, составляющей угол 30 градусов к горизонту, скатывается из состояния покоя без скольжения однородный шарик. Пренебрегая силой трения качения, определите время движения шарика по наклонной плоскости, если известно, что центр масс шарика при скатывании понизился на 30 см.



Дано:

$\alpha = 30^\circ$

$v_0 = 0 \frac{м}{c}$

$h = 0,3 м$

$t_1 - ?$

Решение

Для определения времени движения шарика по наклонной плоскости, запишем уравнения движения центра масс шарика.
Так как во время движения шарика все действующие на шарик силы остаются неизменными, следовательно, ускорение шарика на всём протяжении движения изменяться не будет, поэтому для решения задачи применим схему решения задач на составление уравнений равнопеременного поступательного движения:

СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО КИНЕМАТИКЕ РАВНОПЕРЕМЕННОГО ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1 Сделать чертёж к задаче, на котором отметить начальные координаты тел и направления векторов их начальных скоростей и ускорений (начало координат обычно помещают в начальной точке движения тела или одного из тел. При выборе направлений координатных осей следует учитывать направление векторов перемещений, скоростей и ускорений тел).
2 Затем сделать аналогичные чертежи для характерных моментов времени, о которых есть информация в условии задачи.
3 Записать уравнения движения для каждого тела в проекциях на оси координат сначала в общем виде согласно рисунка для начального момента времени, а затем для характерных моментов времени, о которых есть информация в условии задачи.

$$\begin{cases} x = \pm x_0 \pm v_{ox} t \pm \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y = \pm y_0 \pm v_{oy} t \pm \dfrac{a_y t^2}{2} \end{cases}, \qquad \begin{cases} v_x = \pm v_{0x} \pm a_x t \\ v_y = \pm v_{oy} \pm a_y t \end{cases},$$

При необходимости дополнить эту систему следующими уравнениями связи:

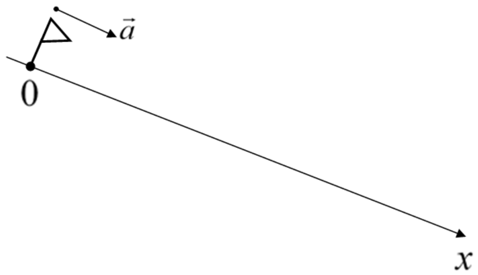
$$v^2 - v_0^2 = 2aS$$ - если движение равноускоренное,

$$v^2 - v_0^2 = -2aS$$ - если движение равнозамедленное.

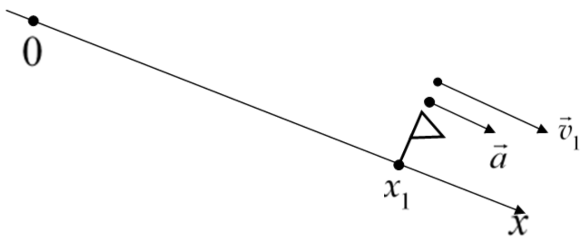
Следует помнить, что проекция вектора считается положительной, если вектор сонаправлен с положительным направлением оси координат, в противном случае проекция вектора считается отрицательной.
Если вектор перпендикулярен оси координат, то его проекция на эту ось равна нулю
4 Решить полученную систему уравнений и найти решение задачи в общем (т.е. буквенном виде). Проанализировать полученное равенство.
5 Проверить размерность этого равенства и если она совпадает, подставить в окончательное уравнение числовые значения данных в условии задачи величин, предварительно переведя их в одну и ту же систему единиц.

Согласно этой схемы сделаем рисунки для начального момента времени $t = 0 c$, а затем для момента $t = t_1$, когда шарик оказался у подножия наклонной плоскости.

$t = 0 c$



$t = t_1$



Запишем уравнения движения для шарика в общем виде согласно рисунка для начального момента времени $t = 0 c$:

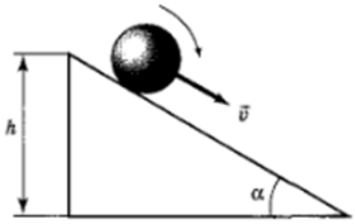
$$\begin{cases} x = \dfrac{a t^2}{2} \\ v_x = a t \end{cases}.$$

А теперь эту систему уравнений запишем для момента времени $t = t_1$. Согласно обозначениям нашего рисунка:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a t_1^2}{2} & (1) \\ \upsilon_1 = a t_1 & (2) \end{cases}$$

Из уравнения (2) выразим ускорение шарика a и подставив его в уравнение (1), получим:

$$a = \frac{\upsilon_1}{t_1} \Rightarrow x_1 = \frac{\frac{\upsilon_1}{t_1} t_1^2}{2} = \frac{\upsilon_1 t_1}{2} \qquad (3)$$



Из рисунка к условию задачи следует, что координату x_1 можно выразить через высоту наклонной плоскости h и угол наклона α следующим образом:

$$x_1 = \frac{h}{\sin\alpha} \qquad (4)$$

Подставим (4) в (3):

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{\upsilon_1 t_1}{2},$$

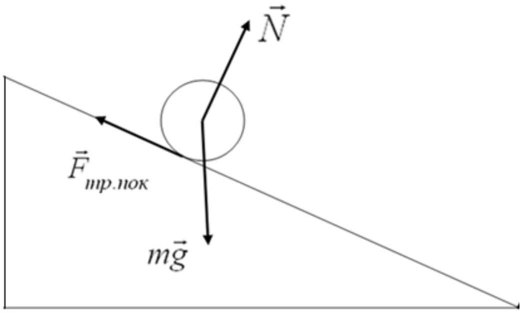
следовательно,

$$t_1 = \frac{2h}{\upsilon_1 \sin\alpha}. \qquad (5)$$

Из анализа уравнения (5) следует, что неизвестна скорость шарика υ_1, которую необходимо будет найти, чтобы решить задачу.

Так как уравнения движения мы уже использовали, следовательно, неизвестную скорость надо определить из других соображений. Скорость тела можно попытаться определить из кинетической энергии тела, для этого можно записать закон изменения полной механической энергии или закон сохранения полной механической энергии для шарика.

Для этого проведём анализ условий, в которых происходит движение шарика:



На шарик действуют следующие силы:
- сила тяжести (консервативная сила),
- сила реакции опоры (неконсервативная сила),
- сила трения покоя (неконсервативная сила).

При движении шарика по наклонной плоскости сила реакции опоры $\vec{N}$ работы не совершает, так как она на всём протяжении движения шарика направлена перпендикулярно мгновенному перемещению $d\vec{r}$ шарика, следовательно, согласно определению механической работы $dA = Fdr\cos\beta$ на любом бесконечно малом участке движения работа силы реакции равна нулю (так как $\beta = 90^\circ$ и, следовательно, $\cos\beta = 0$). Так как механическая работа величина аддитивная, следовательно, на всём участке пути её работа так же равна нулю. Таким образом, в нашем случае работа силы реакции опоры $\vec{N}$ при движении шарика равна нулю.

Сила трения качения по условию отсутствуют, а сила трения покоя, благодаря которой и происходит вращение шарика (если бы она не действовала, то шарик бы не вращался, а просто скользил бы по наклонной плоскости), работы по перемещению шарика не совершает.

Из этого анализа следует, что на шарик действует консервативная сила тяжести, а остальные силы работу не совершают, следовательно, для шарика будет выполняться закон сохранения полной механической энергии:

Полная механическая энергия системы тел, на тела которой действуют только консервативные силы или все действующие на систему неконсервативные силы работу не совершают, не изменяется с течением времени.

(то есть $E_{начальная} = E_{конечная}$)

Поэтому применим схему решения задач на закон сохранения полной механической энергии:

СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ПОЛНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

1. сделать рисунок к задаче, на котором указать начальное и конечное положения тела (или тел), а также его скорости в начальном и конечном положениях. Выбрать начальный уровень отсчёта потенциальной энергии (обычно он выбирается по самой нижней точке траектории тела).
2. Проанализировать все силы, действующие на тела системы за рассматриваемый промежуток времени.

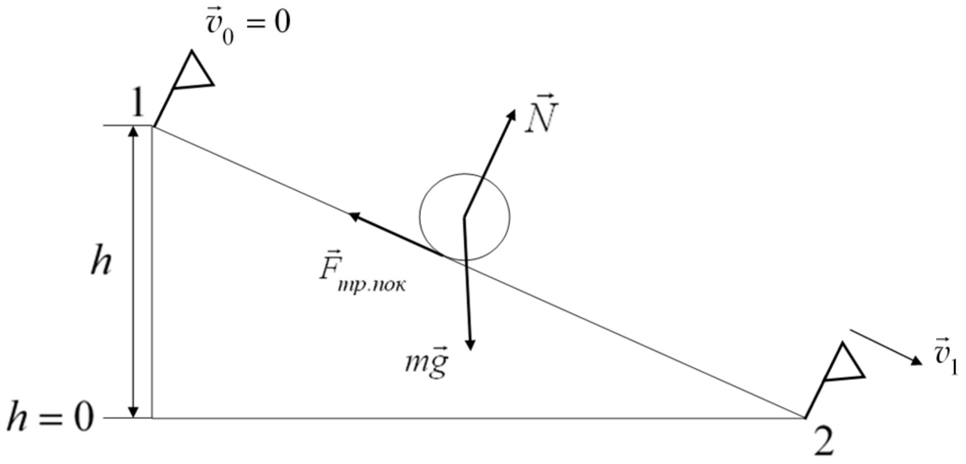
- если на тела системы действуют только консервативные силы ($F_{грав}, F_{тяж}, F_{упр}, F_{кулона}, F_{арх}$) либо все действующие на систему неконсервативные силы работы не совершают за рассматриваемый промежуток времени, то записать закон сохранения полной механической энергии для рассматриваемой системы в виде:

$$E_{начальная} = E_{конечная},$$

(при этом следует помнить, что скорости всех тел и работы всех сил должны быть записаны относительно одной и той же системы координат (обычно относительно земли)).

3. Расписать полную механическую энергию системы в начальном и конечном положениях.
4. Решить полученную систему уравнений (при необходимости её дополнить уравнениями динамики или кинематики).

Итак, делаем рисунок к задаче:



Запишем закон сохранения полной механической энергии при перемещении шарика из точки 1 в точку 2:

$$E_1 = E_2.$$

В точке 1:

- потенциальная энергия центра масс шарика равна $П_1 = mgh$,
- кинетическая энергия равна нулю ($T_1 = 0$), так как по условию задачи шарик покоился в этой точке.

В точке 2:

- потенциальная энергия равна $П_2 = 0$, так как при нашем выборе начального уровня отсчёта потенциальной энергии, в точке 2 высота центра масс шарика равна нулю, то есть $h_2 = 0\,м$,
- кинетическая энергия шарика определяется по теореме Кёнига, то есть она равна кинетической энергии поступательного движения шарика со скоростью его центра масс $T = \frac{mv^2}{2}$ и кинетической энергии вращательного движения шарика вокруг оси вращения, проходящей через центр масс шарика $T = \frac{I\omega^2}{2}$, то есть $T_2 = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{I\omega_1^2}{2}$.

Таким образом,

$$mgh + 0 = 0 + \left(\frac{mv_1^2}{2} + \frac{I\omega_1^2}{2}\right) \Rightarrow mgh = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{I\omega_1^2}{2}. \qquad (6)$$

Так как для однородного шара относительно оси, проходящей через центр масс $I = \frac{2}{5}mR^2$, (7)

и $v = \omega R$, следовательно, $\omega = \frac{v}{R}$. (8)

Подставим (7) и (8) в (6), получим:

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v_1}{R}\right)^2}{2} \Rightarrow mgh = \frac{7mv_1^2}{10} \Rightarrow gh = \frac{7v_1^2}{10}.$$

Отсюда определяем скорость цента масс шарика в точке 2: $v_1 = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$. (9)

Окончательно, подставим (9) в (5), получим:

$$t_1 = \frac{2h}{v_1 \sin\alpha} = \frac{2h}{\sqrt{\frac{10gh}{7}}\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{7h}{10g}},$$ то есть:

$$t_1 = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{7h}{10g}}. \qquad (10)$$

Проверим размерность равенства (10): $c = \sqrt{\frac{м}{\frac{м}{c^2}}} = \sqrt{\cancel{м}\cdot\frac{c^2}{\cancel{м}}} = \sqrt{c^2} = c.$

Окончательно определяем время движения шарика по наклонной плоскости:

$$t_1 = \frac{2}{\sin 30}\sqrt{\frac{7\cdot 0,3м}{10\cdot 9,8\frac{м}{c^2}}} = 0,6c.$$

Ответ: $t_1 = 0,6c$.