Из пункта А с начальной скоростью 200 см/с и постоянным ускорением выезжает первое тело. Через 1/6 мин после выезда первого тела из того же места выезжает второе тело с начальной скоростью 12 м/с с тем же постоянным ускорением, что и у первого тела. Найдите величину этого ускорения, если второе тело догнало первое через 50 секунд после начала его движения.

Ответ: $a \approx 1{,}1\frac{м}{с^2}$

Решим эту задачу, применив схему решения задач по кинематике материальной точки.

Для этого нам понадобиться записать уравнения движения для тела. Из условия задачи следует, что оба тела движутся равноускорено, следовательно, уравнения движения обоих тел будут иметь вид: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$.

СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО КИНЕМАТИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. Сделать чертёж к задаче для начального момента времени $t = 0c$, на котором отметить начальные координаты тел x_0, y_0 и направления векторов их начальных скоростей v_o и ускорений a (начало координат обычно помещают в начальной точке движения тела или одного из тел. При выборе направлений координатных осей следует учитывать направление векторов перемещений, скоростей и ускорений тел).
2. Затем сделать аналогичные чертежи для характерных моментов времени, о которых есть информация в условии задачи.
3. Записать уравнения движения для каждого тела в проекциях на оси координат сначала в общем виде, используя рисунок для начального момента времени $t = 0c$, а затем для характерных моментов времени, о которых есть информация в условии задачи.

$$\begin{cases} x = \pm x_0 \pm v_{ox} t \pm \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y = \pm y_0 \pm v_{oy} t \pm \dfrac{a_y t^2}{2} \end{cases}, \qquad \begin{cases} v_x = \pm v_{0x} \pm a_x t \\ v_y = \pm v_{oy} \pm a_y t \end{cases}.$$

При необходимости дополнить полученную систему следующими уравнениями связи:

$v^2 - v_0^2 = 2aS$ - если движение равноускоренное,

$v^2 - v_0^2 = -2aS$ - если движение равнозамедленное,

где v_0 и v - начальная и конечная скорости тела, a - ускорение тела и S - путь, пройденный телом.

4. Решить полученную систему уравнений и найти решение задачи в общем (т.е. буквенном) виде. Проанализировать полученное равенство.
5. Проверить размерность этого равенства и если она совпадает, подставить в окончательное уравнение числовые значения данных в условии задачи величин, предварительно переведя их в одну и ту же систему единиц.

Итак, согласно пункта 1 и 2 схемы решения задач делаем рисунки к задаче, на которых отмечаем координаты тел и направления векторов их скоростей и ускорений в начальный момент времени $t = 0c$ (в нашем случае в качестве начального момента времени $t = 0c$ удобнее выбрать момент, когда выезжает второе тело), а так же для характерных моментов времени, о которых есть информация в задаче (то есть момента встречи $t_{встр}$, когда второе тело догоняет первое).

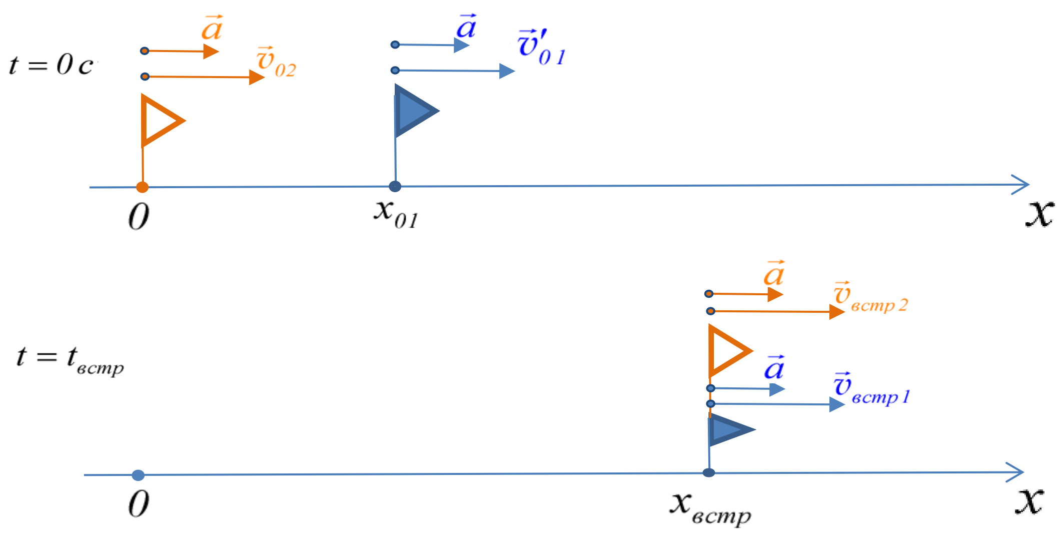

Рис.1

Теперь запишем уравнения движения для каждого тела сначала в общем виде согласно рис. 1 для начального момента времени $t = 0c$:

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + v'_{01}t + \dfrac{at^2}{2} \\ v_1 = v'_{01} + at \\ x_2 = v_{02}t + \dfrac{at^2}{2} \\ v_2 = v_{02} + at \end{cases} . \tag{1}$$

В системе уравнений (1) надо найти начальную координату первого тела x_{01} и его скорость v'_{01} в момент времени $t = 0c$. При этом учтём, что первое тело до этого момента уже двигалось некоторое время Δt с ускорением a и начальной скоростью v_{02}. В этом случае получим, что

$$x_{01} = v_{01}\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2} \text{ и } v'_{01} = v_{01} + a\Delta t .$$

Тогда система уравнений (1) примет ввид:

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + v'_{01}t + \dfrac{at^2}{2} = \left(v_{01}\Delta t + \dfrac{a\Delta t^2}{2}\right) + \left(v_{01} + a\Delta t\right)t + \dfrac{at^2}{2} = v_{01}\left(t + \Delta t\right) + a\Delta t \cdot t + \dfrac{a\left(t^2 + \Delta t^2\right)}{2} \\ v_1 = v'_{01} + at = v_{01} + a\Delta t + at = v_{01} + a\left(t + \Delta t\right) \\ x_2 = v_{02}t + \dfrac{at^2}{2} \\ v_2 = v_{02} + at \end{cases} \tag{3}$$

Систему уравнений (3) решать ещё нельзя, так как в неё входят текущие координаты x и время t. Поэтому необходимо записать уравнения системы (3) для момента встречи $t_{встр}$ согласно рис. 1:

$$\begin{cases} x_{встр} = v_{01}\left(t_{встр} + \Delta t\right) + a\Delta t \cdot t_{встр} + \dfrac{a\left(t^2_{встр} + \Delta t^2\right)}{2} & (1) \\ v_{встр1} = v_{01} + a\left(t_{встр} + \Delta t\right) & (2) \\ x_{встр} = v_{02}t_{встр} + \dfrac{at^2_{встр}}{2} & (3) \\ v_{встч2} = v_{02} + at_{встр} & (4) \end{cases} .$$

Приравняем уравнения (1) и (3) так как координаты обоих тел в момент их встречи были равны:

$$v_{01}\left(t_{встр} + \Delta t\right) + a\Delta t \cdot t_{встр} + \frac{a\left(t^2_{встр} + \Delta t^2\right)}{2} = v_{02}t_{встр} + \frac{at^2_{встр}}{2} , \quad \Rightarrow ,$$

$$v_{01}t_{встр} + v_{01}\Delta t + a\Delta t \cdot t_{встр} + \frac{at^2_{встр}}{2} + \frac{a\Delta t^2}{2} = v_{02}t_{встр} + \frac{at^2_{встр}}{2} . \tag{5}$$

Выразим из уравнения (5) искомое ускорение a и окончательно получим:

$$a = \frac{2t_{встр}\left(v_{02} - v_{01}\right)}{2\Delta t \cdot t_{встр} - \Delta t^2} . \tag{6}$$

Прежде чем подставлять числовые данные, проверим размерность уравнения (6):

$$\left[a\right] = \left[\frac{м}{с^2}\right] = \frac{с\left(\dfrac{м}{с} - \dfrac{м}{с}\right)}{с \cdot с - с^2} = \frac{\cancel{с} \cdot \dfrac{м}{\cancel{с}}}{с^2 - с^2} = \frac{м}{с^2} .$$

Теперь подставим числовые значения и их размерности:
$$a = \frac{2 \cdot 50с\left(12\dfrac{м}{с} - 2\dfrac{м}{с}\right)}{2 \cdot 10с \cdot 50с - \left(10с\right)^2} \approx 1{,}1\frac{м}{с^2} .$$

Ответ: $a \approx 1{,}1\dfrac{м}{с^2}$.