С поверхности Земли под углом 60 градусов бросают тело с начальной скоростью 0.1 км/с. Определите максимальную высоту подъёма тела над Землёй в процессе его движения и расстояние от точки бросания до точки падения тела на Землю. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ: $H = 125\,м$, $S = 216\,м$

Дано:

$v_0 = 100\dfrac{м}{с}$

$\alpha = 60^0$

$H - ?$

$S - ?$

Решим эту задачу, применив схему решения задач по кинематике материальной точки.
Для этого нам понадобиться записать уравнения движения для тела.

Уравнением движения *называется уравнение зависимости от времени радиус вектора* $\vec{r}(t)$ *материальной точки (или, что то же самое, уравнения зависимости координат тела* $x(t), y(t), z(t)$ *от времени).*

По условию задачи уравнение движения тела не задано, поэтому нам его надо найти.
Для этого необходимо проанализировать условие задачи. У нас есть информация о начальной скорости и месте бросания тела, но нет пока информации об его ускорении. В этом нам поможет второй закон Ньютона, который как раз и говорит о том, когда тело движется с ускорением:
В инерциальной системе отсчёта векторная сумма всех сил, действующих на материальную точку, равна произведению массы этой материальной точки на сообщённое ей ускорение, то есть

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}\,.$$

Для этого выберем инерциальную систему отсчёта, так как только в этих системах отсчёта выполняется второй закон Ньютона. Напомню, что к инерциальным системам отсчёта относятся системы, которые движутся без ускорения. Обычно в качестве такой системы выбирают поверхность Земли (строго говоря, поверхность Земли нельзя рассматривать как инерциальную систему отсчёта из-за того, что Земля вращается вокруг своей оси и, следовательно, любая точка поверхности движется с каким-то центростремительным ускорением. Однако величина этого ускорения на её поверхности настолько мала, что обычно им пренебрегают и принимают поверхность Земли в качестве инерциальной системы отсчёта).
Теперь рассмотрим силы, которые действуют на тело в процессе движения, используя условие задачи. Чтобы определить количество сил, действующих на тело, применим следующее правило:
Сколько ***физических полей*** *(гравитационное, электрическое, магнитное и электромагнитное) и* ***тел*** *действуют на данное тело, столько и сил, плюс* ***силы трения и сопротивления****, если они есть по условию задачи.*

Для этого необходимо знать различные виды сил и помнить основные свойства физических полей:
- ***гравитационное*** (оказывает силовое воздействие на тела обладающие массой),
- ***электрическое*** (оказывает силовое воздействие на неподвижные и движущиеся электрические заряды и заряженные тела),
- ***магнитное*** (оказывает силовое воздействие на магниты, проводники с током и движущиеся электрические заряды),
- ***электромагнитное*** (обладает одновременно свойствами электрического и магнитного полей).

Вернёмся теперь к задаче. Применим вышерассмотренное правило:
- во-первых, рассмотрим, какие физические поля действуют на тело во время его движения.
Из условия задачи следует, что на тело в процессе его движения магнитное и электрическое поля Земли оказывать влияния не будут, так как тело по условию задачи не намагничено, не заряжено и по нему не протекает электрический ток.
Из анализа задачи следует, что тело, брошенное с поверхности Земли, опять упало на её поверхность. Это означает, что на него во время полёта действовала *сила тяжести со стороны гравитационного поля Земли*.
- во-вторых, рассмотрим, какие тела действуют на наше тело во время его движения.
Из условия задачи следует, что никакие тела при движении не действуют, поэтому и никаких других сил так же не действует.
- в-третьих, сопротивления воздуха нет, следовательно, и силы сопротивления так же отсутствуют.

Таким образом, на наше тело во время полёта будет действовать всего лишь одна сила тяжести $F_{тяж} = m\vec{g}$ и тогда второй закон Ньютона для нашего тела будет иметь вид: $m\vec{g} = m\vec{a}$.
Следовательно, $\cancel{m}\vec{g} = \cancel{m}\vec{a}$ и $\vec{a} = \vec{g}$, то есть тело будет двигаться с ускорением свободного падения $\vec{g}$ (находиться в свободном падении).
Напомню, что ***свободным падением*** *называется движение тела под действием только силы тяжести* (в этом случае все тела независимо от их массы и размеров движутся с одним и тем же ускорением, которое так и называется ***ускорением свободного падения*** $\vec{g}$).
Теперь, когда мы нашли ускорение тела, мы можем, используя формулы-определения, получить уравнение движения нашего тела.

Итак, по определению мгновенного ускорения: $\vec{g} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, следовательно,

$$d\vec{v} = \vec{g}dt \;\Rightarrow\; \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t \vec{g}dt \;\Rightarrow\; \vec{v}\Big|_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} = \vec{g}t\Big|_0^t \;\Rightarrow\; \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{g}t \quad \text{и} \quad \text{окончательно:}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \tag{1}$$

Уравнение (1) описывает изменение скорости тела в процессе движение. Это уравнение поможет нам найти уравнение движения.

По определению мгновенной скорости: $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, следовательно,

$$d\vec{r} = \vec{v}dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{g}t)\,dt \Rightarrow \vec{r}\,\Big|_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} = \left(\vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}\right)\Bigg|_0^t \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$ и окончательно:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}. \qquad (2)$$

Уравнение (2) описывает изменение радиус-вектора тела $\vec{r}(t)$ с течением времени, то есть позволяет найти положение тела в любой момент времени t.

Теперь, когда у нас есть вся необходимая информация, приступим к решению задачи. Для этого применим схему решения задач.

СХЕМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО КИНЕМАТИКЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1 Сделать чертёж к задаче для начального момента времени, на котором отметить начальные координаты тел и направления векторов их начальных скоростей и ускорений (начало координат обычно помещают в начальной точке движения тела или одного из тел. При выборе направлений координатных осей следует учитывать направление векторов перемещений, скоростей и ускорений тел).

2 Затем сделать аналогичные чертежи для характерных моментов времени, о которых есть информация в условии задачи.

3 Записать уравнения движения для каждого тела в проекциях на оси координат сначала в общем виде, используя рисунок для начального момента времени $t = 0c$, а затем для характерных моментов времени, о которых есть информация в условии задачи.

$$\begin{cases} x = \pm x_0 \pm v_{ox} t \pm \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y = \pm y_0 \pm v_{oy} t \pm \dfrac{a_y t^2}{2} \end{cases}, \qquad \begin{cases} v_x = \pm v_{0x} \pm a_x t \\ v_y = \pm v_{oy} \pm a_y t \end{cases},$$

При необходимости дополнить полученную систему следующими уравнениями связи:

$v^2 - v_0^2 = 2aS$ - если движение равноускоренное,

$v^2 - v_0^2 = -2aS$ - если движение равнозамедленное.

4 Решить полученную систему уравнений и найти решение задачи в общем (т.е. буквенном виде). Проанализировать полученное равенство.

5 Проверить размерность этого равенства и если она совпадает, подставить в окончательное уравнение числовые значения данных в условии задачи величин, предварительно переведя их в одну и ту же систему единиц.

Итак, согласно пункта 1 и 2 схемы решения задач делаем рисунок к задаче, на котором отмечаем координаты тела и направления векторов его скоростей и ускорений в начальный момент времени $t = 0c$, а так же в характерные моменты времени, о которых есть информация в задаче (в нашем случае для момента подъёма тела $t_{под}$ на максимальную высоту H и момент падения тела на Землю t_n).

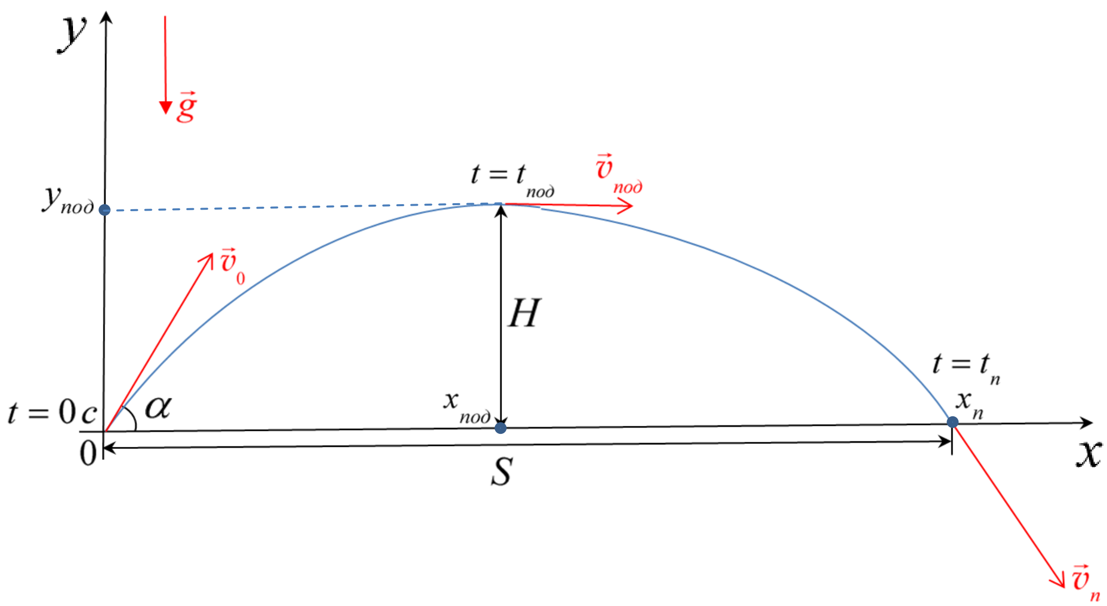


Рис. 1

Теперь согласно пункту 3 схемы решения задач запишем уравнения (1) и (2) в проекциях на выбранные нами оси координат сначала в общем виде согласно рис. 1 для начального момента времени $t = 0c$, а затем для момента подъёма тела $t_{под}$ на максимальную высоту H и момента падения тела на Землю t_n).

Итак, для момента времени $t = 0c$ имеем:

$$\begin{cases} x = v_o \cos\alpha \cdot t \\ v_x = v_o \cos\alpha \\ y = v_o \sin\alpha \cdot t - \dfrac{gt^2}{2} \\ v_y = v_o \sin\alpha - gt \end{cases} \tag{3}$$

Система уравнений (3) позволяет определить координаты x и y тела и проекции скорости тела v_x и v_y на оси координат в любой момент времени. Однако сразу решать её нельзя так, как в ней нам ничего не известно. Поэтому запишем уравнения системы (3) для момента подъёма тела на максимальную высоту H . Для этого на рис. 1 смотрим, какие обозначения мы вводили для тела в этот момент времени $t_{под}$ и используем их для записи уравнений (3):

$$\begin{cases} x_{под} = v_o \cos\alpha \cdot t_{под} & (4) \\ v_{под} = v_o \cos\alpha & (5) \\ H = v_o \sin\alpha \cdot t_{под} - \dfrac{gt_{под}^2}{2} & (6) \\ 0 = v_o \sin\alpha - gt_{под} & (7) \end{cases}$$

Максимальную высоту подъёма тела H можно найти из уравнения (4), однако там не известно время подъёма тела на максимальную высоту $t_{под}$. Его найдём из уравнения (7): $gt_{под} = v_o \sin\alpha$, $\Rightarrow$

$$t_{под} = \frac{v_o \sin\alpha}{g} . \tag{8}$$

Подставим (8) в уравнение (6):

$$H = v_o \sin\alpha \cdot t_{под} - \frac{gt_{под}^2}{2} t_{под} = v_o \sin\alpha \frac{v_o \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_o \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} , \quad \Rightarrow$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} . \tag{9}$$

Прежде чем подставлять числовые значения в уравнение (9), необходимо проверить его размерность:

$$[H] = [м] = \frac{\left(\dfrac{м}{c}\right)^2}{\dfrac{м}{c^2}} = \frac{\dfrac{м^2}{c^2}}{\dfrac{м}{c^2}} = \frac{м^{\cancel{2}}}{\cancel{c}^2}\frac{\cancel{c}^2}{\cancel{м}} = м .$$

Так как размерность совпала, то теперь можно подставить числовые значения в системе СИ с единицами измерения:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{\left(100\dfrac{м}{c}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot 10\dfrac{м}{c^2}} = 125\, м .$$

Далее, для определения максимальной дальности полёта тела S запишем систему уравнений (3) для момента падения тела на Землю t_n . Для этого на рис. 1 смотрим, какие обозначения мы вводили для тела в этот момент времени t_n и используем их для записи уравнений системы (3):

$$\begin{cases} S = v_o \cos\alpha \cdot t_n & (10) \\ v_{n_x} = v_o \cos\alpha & (11) \\ 0 = v_o \sin\alpha \cdot t_n - \dfrac{gt_n^2}{2} & (12) \\ v_{n_y} = v_o \sin\alpha - gt_n & (13) \end{cases}$$

Максимальную дальность полёта тела S можно найти из уравнения (10), однако там не известно время полёта тела $t_п$.

Его найдём из уравнения (12): $$0 = v_0 \sin\alpha \cdot t_п - \frac{g t_п^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{g t_п^{\cancel{2}}}{2} = v_0 \sin\alpha \cdot t_п \ , \qquad \Rightarrow$$

$$t_п = \frac{v_0 \sin\alpha}{2g} . \qquad (14)$$

Подставим (14) в уравнение (10): $$S = v_0 \cos\alpha \cdot t_п = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{2g} \qquad (15)$$

Прежде чем подставлять числовые значения в уравнение (15), необходимо проверить его размерность:

$$[S] = [м] = \frac{\left(\frac{м}{с}\right)^2}{\frac{м}{с^2}} = \frac{\frac{м^2}{с^2}}{\frac{м}{с^2}} = \frac{м^{\cancel{2}}}{\cancel{с}^2} \frac{\cancel{с}^2}{\cancel{м}} = м .$$

Так как размерность совпала, то теперь можно подставить числовые значения в системе СИ с единицами измерения:

$$S = \frac{v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{2g} = \frac{\left(100 \frac{м}{с}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2}}{2 \cdot 10 \frac{м}{с^2}} = 216 м .$$

Ответ: $H = 125\,м, \ S = 216\,м$.

Ниже приводится пример, как надо оформить подобную задачу в тетради.

С поверхности Земли под углом 60 градусов бросают тело с начальной скоростью 0.1 км/с. Определите максимальную высоту подъёма тела над Землёй в процессе его движения и расстояние от точки бросания до точки падения тела на Землю. Сопротивлением воздуха пренебречь. ***Ответ:*** $H = 125\,м, \ S = 216\,м$

Дано:

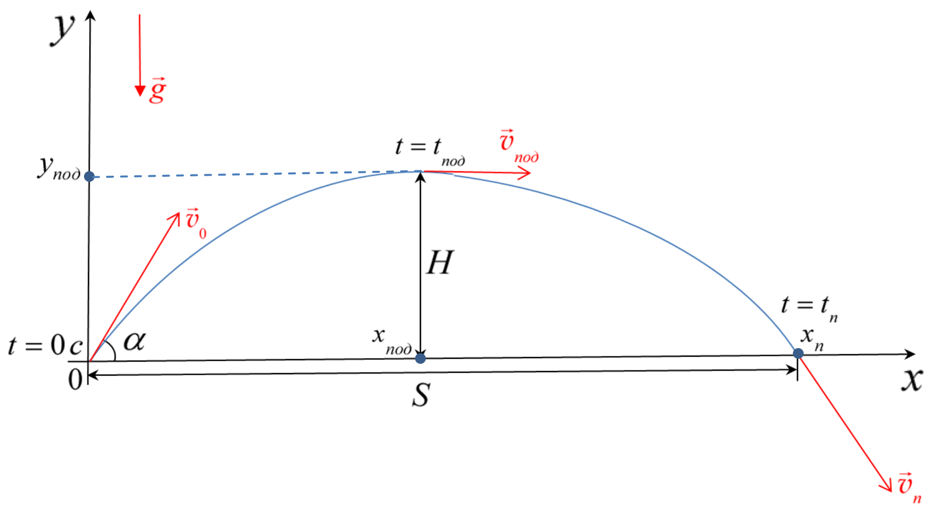
$v_0 = 100 \frac{м}{с}$

$\alpha = 60^0$

$H - ?$

$S - ?$

Сделаем рисунок к задаче:



Запишем уравнения движения для тела в общем виде:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ v_x = v_0 \cos\alpha \\ y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \dfrac{g t^2}{2} \\ v_y = v_0 \sin\alpha - g t \end{cases} , \qquad (1)$$

Запишем уравнения системы (1) для момента $t_{под}$ подъёма тела на максимальную высоту H:

$$\begin{cases} x_{под} = v_0 \cos\alpha \cdot t_{под} & (2) \\ v_{под} = v_0 \cos\alpha & (3) \\ H = v_0 \sin\alpha \cdot t_{под} - \dfrac{g t_{под}^2}{2} & (4) \\ 0 = v_0 \sin\alpha - g t_{под} & (5) \end{cases}$$

Найдём время подъёма $t_{под}$ тела на максимальную высоту H из уравнения (7): $g t_{под} = v_0 \sin\alpha$, $\Rightarrow$

$$t_{под} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (6)$$

Подставим (6) в уравнение (4):

$$H = v_0 \sin\alpha \cdot t_{под} - \frac{g t_{под}^2}{2} t_{под} = v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}, \quad \Rightarrow$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \qquad (7)$$

Проверим размерность уравнения (7): $\left[H\right] = \left[м\right] = \dfrac{\left(\dfrac{м}{с}\right)^2}{\dfrac{м}{с^2}} = \dfrac{\dfrac{м^2}{с^2}}{\dfrac{м}{с^2}} = \dfrac{м^{\cancel{2}}}{\cancel{с}^2}\dfrac{\cancel{с}^2}{\cancel{м}} = м.$

Подставим числовые значения в уравнение (7): $H = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \dfrac{\left(100\,\dfrac{м}{с}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot 10\,\dfrac{м}{с^2}} = 125\,м.$

Для определения максимальной дальности полёта тела S запишем систему уравнений (3) для момента падения тела на Землю $t_п$:

$$\begin{cases} S = v_0 \cos\alpha \cdot t_п & (8) \\ v_{п_x} = v_0 \cos\alpha & (9) \\ 0 = v_0 \sin\alpha \cdot t_п - \dfrac{g t_п^2}{2} & (10) \\ v_{п_y} = v_0 \sin\alpha - g t_п & (11) \end{cases}$$

Найдём время полёта тела $t_п$ из уравнения (10): $0 = v_0 \sin\alpha \cdot t_п - \dfrac{g t_п^2}{2} \Rightarrow \dfrac{g t_п^{\cancel{2}}}{2} = v_0 \sin\alpha \cdot t_п$, $\Rightarrow$

$$t_п = \frac{v_0 \sin\alpha}{2g}. \qquad (12)$$

Подставим (12) в уравнение (8): $$S = v_0 \cos\alpha \cdot t_п = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{v_0 \sin\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{2g} \qquad (13)$$

Проверить размерность уравнения (13): $\left[S\right] = \left[м\right] = \dfrac{\left(\dfrac{м}{с}\right)^2}{\dfrac{м}{с^2}} = \dfrac{\dfrac{м^2}{с^2}}{\dfrac{м}{с^2}} = \dfrac{м^{\cancel{2}}}{\cancel{с}^2}\dfrac{\cancel{с}^2}{\cancel{м}} = м.$

Подставить числовые значения в (13): $S = \dfrac{v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{2g} = \dfrac{\left(100\,\dfrac{м}{с}\right)^2 \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{1}{2}}{2 \cdot 10\,\dfrac{м}{с^2}} = 216\,м.$

Ответ: $H = 125\,м$, $S = 216\,м$.