ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 0-1:

Обработка результатов физического эксперимента на примере определения ускорения свободного падения с помощью математического маятника.

Студент **_Иванов Андрей_** группа **ТМ -12**

Допуск________________________________Выполнение____________________Защита_________ __________

Цель работы: получение и закрепление навыков обработки результатов прямых, косвенных и совместных измерений.

Приборы и материалы: математический маятник, измерительная линейка, секундомер.

Упражнение 1. Порядок обработки прямых измерений. Определение периода колебаний математического маятника.

Таблица 1

$N_{изм}$	1	2	3	4	5	$\sum$
T_i, c	**1.79**	**1.84**	**1.75**	**1.82**	**1.78**	**8.98**
$T_i - \langle T \rangle$, c	**- 0.01**	**0.04**	**- 0.05**	**0.02**	**- 0.02**	**-**
$(T_i - \langle T \rangle)^2, 10^{-4} c^2$	**1**	**16**	**25**	**4**	**4**	**50**

$\times 10^{-4} c^2\ c^2$

1. Среднее значение периода колебаний математического маятника: $\boldsymbol{<T>=\dfrac{T_1+T_2+\ldots+T_5}{5}}$.

$$<T>=\frac{1.79\text{ c}+1.84\text{ c}+1.75\text{ c}+1.82\text{ c}+1.78\text{ c}}{5}=1.80c$$

2. Проведём соответствующие вычисления и заполним табл. 1.

$$\boldsymbol{\left[T_1-\langle T\rangle\right]=c-c=[c]}$$

$$T_1-\langle T\rangle=1.79c-1.80c=-0.01c\,,$$

$$\boldsymbol{\left[\left(T_1-\langle T\rangle\right)^2\right]=c^2-c^2=\left[c^2\right]}$$

$$\left(T_1-\langle T\rangle\right)^2=\left(0.01c\right)^2=0.0001c^2=10^{-4}c^2$$

3. найдём дисперсию среднего значение периода колебаний маятника

$$\boldsymbol{S^2_{<T>}=\frac{(T_1-<T>)^2+(T_2-<T>)^2+\ldots+(T_5-<T>)^2}{5\cdot 4}}\,.$$

$$\boldsymbol{\left[S^2_{<T>}\right]=\frac{(c-c)^2+(c-c)^2+\ldots+(c-c)^2}{1}=\left[c^2\right]}.$$

$$S^2_{\langle T\rangle}=\frac{50\cdot 10^{-4}\ c^2}{20}=2.5\cdot 10^{-4}\ c^2$$

4. Найдём среднеквадратичное отклонение среднего значения по формуле $\boldsymbol{S_{<T>}=\sqrt{S^2_{<T>}}}$,

$$\boldsymbol{\left[S_{<T>}\right]=\sqrt{c^2}=[c]}.$$

$$S_{\langle T\rangle}=\sqrt{S^2_{\langle T\rangle}}=\sqrt{2.5\cdot 10^{-4}\ c^2}=1.6\cdot 10^{-2}\ c$$

5. Результат измерения периода колебаний запишем в виде: $\boldsymbol{T=<T>\pm t_{p,k}S_{<T>}}$

где для вероятности $p=0.95$ и числа степеней свободы $k=n-1=4$, значение параметра Стьюдента $t_{p,k}=2.8$

Ответ: $T=\left(1.80\pm 2.8\cdot 1.6\cdot 10^{-2}\right)c=\left(1.80\pm 0.04\right)c$

Вывод : На примере определения периода колебаний математического маятника я научился обрабатывать прямые измерения.

Упражнение 2. **Обработка результатов косвенных измерений. Определение ускорения свободного падения**

Таблица 2

$N_{изм}$	T_i, c	$S_{<T>}$, c	l, $м$	$S_{<l>}$, $м$	$\langle g\rangle$, $\frac{м}{c^2}$	S_g, $\frac{м}{c^2}$
1	1.79	$1.6\cdot10^{-2}$	0.80	0.025	10.25	0.13
2	1.84					
3	1.75					
4	1.82					
5	1.78					
$\sum$	8.98					

1. По формуле $\boldsymbol{<g>=\frac{4\pi^2 l}{<T^2>}}$ вычислим среднее значение ускорения.

$$[<g>]=\frac{м}{c^2}=\left[\frac{м}{c^2}\right]; \qquad \langle g\rangle=\frac{4\cdot3{,}14^2\cdot0{,}80\,м}{(1{,}80\,c)^2}=9{,}74\,\frac{м}{c^2}$$

2. Вычислим дисперсию ускорения свободного падения по формуле:

$$S_g^2=\left(\frac{4\pi^2}{\langle T\rangle^2}\right)^2 S_l^2+\left(\frac{-8\pi^2 l}{\langle T\rangle^3}\right)^2 S_T^2+\left(\frac{8\pi\ l}{\langle T\rangle^2}\right)^2 S_\pi^2;$$

$$\left[S_g^2\right]=\left(\frac{1}{c^2}\right)^2 м^2+\left(\frac{м}{c^3}\right)^2 c^2+\left(\frac{м}{c^2}\right)^2 1=\frac{1}{c^4}м^2+\frac{м^2c^2}{c^6}+\frac{м^2}{c^4}=\frac{м^2}{c^4}+\frac{м^2}{c^4}+\frac{м^2}{c^4}=\left[\frac{м^2}{c^4}\right].$$

В качестве погрешности в определении длины нити математического маятника $\boldsymbol{S_l}$ возьмём квадрат приборной погрешности ***(в качестве приборной погрешности принимается величина, равная половине цены деления шкалы прибора).***

$S_l = 0.025$ м

В качестве погрешности числа π $\boldsymbol{S_\pi}$ возьмите табличную погрешность ***(в качестве табличной погрешности принимается величина, равная половине единицы последнего разряда округлённой табличной величины).***

$S_\pi = 0.005$

Величину S_T^2 рассчитаем по формуле $S_T^2=\frac{\sum\left(T_i-\langle T\rangle\right)^2}{n-1}$, где n – число измерений.

$$\left[S_T^2\right]=\frac{\sum\left(c-c\right)^2}{1}=\left[c^2\right]; \qquad S_{\langle T\rangle}^2=\frac{4.1\cdot10^{-4}\ c^2}{4}=10^{-2}\ c^2$$

$$S_g^2=\left(\frac{4\cdot3{,}14^2}{(1{,}80\,c)^2}\right)^2\cdot(0{,}025\,м)^2+\left(-\frac{8\cdot3{,}14^2\cdot0{,}80\,м}{(1{,}80\,c)^3}\right)^2\cdot12.5\cdot10^{-4}\ c^2+\left(\frac{8\cdot3{,}14\cdot0{,}80\,м}{(1{,}80\,c)^2}\right)^2\cdot(0.005)^2\ , \quad\Rightarrow$$

$$S_g^2=926.06\cdot10^{-4}\frac{м^2}{c^4}+1463.38\cdot10^{-4}\frac{м^2}{c^4}+9.62\cdot10^{-4}\frac{м^2}{c^4}=3351.21\cdot10^{-4}\frac{м^2}{c^4}=0.34\frac{м^2}{c^4}, \quad\Rightarrow\quad S_g^2=0.34\frac{м^2}{c^4}$$

3. Найдём среднеквадратичное отклонение ускорения: $\boldsymbol{S_g=\sqrt{S_g^2}}$. $\quad S_g=\sqrt{0.34\frac{м^2}{c^4}}=0{,}58\frac{м}{c^2}$

4. Результат измерения ускорения запишем в виде: $\boldsymbol{g=<g>\pm S_g}$.

$$g_{практика}=(9.74\pm0{,}58)\frac{м}{c^2}$$

Вывод: Из сравнения значения ускорения свободного падения, полученного в результате проведённого эксперимента с теоретическим значением:

$$g_{практика} = \left(10.25 \pm 0{,}13\right)\frac{м}{с^2}, \qquad g_{теория} = \left(9.810 \pm 0{,}005\right)\frac{м}{с^2},$$

видно, что их значения незначительно отличаются. Относительная погрешность нашего эксперимента составляет:

$$\varepsilon = \frac{g_{практика} - g_{теория}}{g_{теория}} = \frac{10{,}25\frac{м}{с^2} - 9.81\frac{м}{с^2}}{9.81\frac{м}{с^2}} = 0{,}045 = 4{,}5\%.$$

По моему мнению, это связано в основном со случайными погрешностями измерений, возникающими во время эксперимента.

Упражнение 3. Порядок обработки совместных измерений. Определение ускорения свободного падения

Период колебаний математического маятника вычисляется по формуле $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$.

Для того, чтобы воспользоваться методом обработки совместных измерений для зависимости $y = A \cdot x$ введём следующие обозначения: $\boldsymbol{y = T}$; $\boldsymbol{x = \sqrt{l}}$; $A = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{g}}$.

Таким образом, зная экспериментальную зависимость $T = A\sqrt{l}$ можем вычислить коэффициент A. Затем из соотношения $g = \frac{4 \cdot \pi^2}{A^2}$ определим ускорение свободного падения.

Таблица 3

1	2	3	4	5	6	7	8
	l_i, $\sqrt{м}$	T_i, $с$	x_i, $\sqrt{м}$	y_i, $с$	$x_i y_i$, $\sqrt{м} \cdot с$	x_i^2, $м$	$(y_i - Ax_i)^2$, $с^2$
1							
2							
3							
4							
5							
$\sum$							

1. Проведём соответствующие вычисления и заполним графы 6 и 7 табл. 3.

$$[\boldsymbol{xy}] = \sqrt{м} \cdot с = \left[\sqrt{м} \cdot с\right]$$

$x_1 y_1 =$

$$\left[\boldsymbol{x}^2\right] = \left(\sqrt{м}\right)^2 = [м]$$

$x_1^2 =$

2. По формуле $\boldsymbol{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ вычислим значение параметра A.

$$\boldsymbol{A} = \frac{\sum \sqrt{м} \cdot с}{м} = \frac{с}{\sqrt{м}} = \left[\frac{с}{\sqrt{м}}\right]$$

$A =$

3. Проведём соответствующие расчеты и заполним графу 8 таблицы 3.

$$\left[\boldsymbol{y - Ax} \right] = \boldsymbol{c - \frac{c}{\sqrt{м}}\sqrt{м} = c - c = \left[c \right]}$$

$$y_1 - Ax_1 =$$

$$\left[\boldsymbol{(y - Ax)^2} \right] = \boldsymbol{\left(c - \frac{c}{\sqrt{м}}\sqrt{м} \right)^2 = (c-c)^2 = c^2 = \left[c^2 \right]}$$

$$(y_1 - Ax_1)^2 =$$

По формуле $\boldsymbol{S_A^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - A \cdot x_i)^2}{n-1}}$ вычислим дисперсию параметра А .

$$\boldsymbol{\left[S_A^2 \right] = \frac{1}{\sum м} \cdot \frac{\sum (c - \frac{c}{\sqrt{м}} \cdot \sqrt{м})^2}{1} = \frac{1}{м} \cdot \frac{\sum (c-c)^2}{1} = \frac{\sum c^2}{м} = \frac{c^2}{м} = \left[\frac{c^2}{м} \right]}$$

$$S_A^2 =$$

4. По формуле $\langle g \rangle = \frac{4 \cdot \pi^2}{A^2}$ вычислим среднее значение ускорения свободного падения.

$$\boldsymbol{\left[\langle g \rangle \right] = \frac{1}{\left(\frac{c}{\sqrt{м}} \right)^2} = \frac{1}{\frac{c^2}{м}} = \frac{м}{c^2} = \left[\frac{м}{c^2} \right]}$$

$$\langle g \rangle =$$

5. По формуле $\boldsymbol{S_g^2 = \left(\frac{8 \cdot \pi}{A^2} \right)^2 \cdot S_\pi^2 + \left(-\frac{8 \cdot \pi^2}{A^3} \right)^2 \cdot S_A^2}$ вычислим среднеквадратичное отклонение среднего значения ускорения свободного падения.

$$\boldsymbol{\left[S_g^2 \right] = \left(\frac{1}{\left(\frac{c}{\sqrt{м}} \right)^2} \right)^2 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{\left(\frac{c}{\sqrt{м}} \right)^3} \right)^2 \cdot \frac{c^2}{м} = \left(\frac{1}{\frac{c^2}{м}} \right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{1}{\frac{c^3}{\sqrt{м^3}}} \right)^2 \cdot \frac{c^2}{м} = \frac{м^2}{c^4} + \frac{м^3}{c^6} \cdot \frac{c^2}{м} = \frac{м^2}{c^4} + \frac{м^2}{c^4} = \frac{м^2}{c^4} = \left[\frac{м^2}{c^4} \right]}$$

$$S_g^2 =$$

6. Окончательный результат запишем в виде $\boldsymbol{g = < g > \pm S_g}$.

$$g =$$

7. Для проверки соответствия зависимости $y = A \cdot x$ экспериментальным данным применим F - критерий (критерий Фишера). Для этом вычислим следующее соотношение

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_{оп}^2},$$

где $S_{оп}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - < y >)^2}{n-1}$ - дисперсия опыта (или дисперсия воспроизводимости) с числом степеней свободы равным n - 1, где n - число прямых измерений величины $\boldsymbol{y_i = T_i}$. Значения $\boldsymbol{T_i}$ возьмём из первого упражнения (n = 5), а

$\boldsymbol{S_{ад}^2} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x_i})^2}{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}}$ **-** дисперсия адекватности, где $\boldsymbol{n}$ - число измерений ($\boldsymbol{n}$ = 5), а $\boldsymbol{m}$ - число коэффициентов в уравнении $y = A\cdot x$, ($\boldsymbol{m}$ = 1).

$$\left[\boldsymbol{S_{оп}^2}\right] = \frac{\sum(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c})^2}{\boldsymbol{1}} = \frac{\sum\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{c}^2 = \left[\boldsymbol{c}^2\right]$$

$S_{оп}^2 =$

$$\left[\boldsymbol{S_{ад}^2}\right] = \frac{\sum\left(\boldsymbol{c} - \frac{\boldsymbol{c}}{\sqrt{\boldsymbol{м}}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{м}}\right)^2}{\boldsymbol{1}} = \frac{\sum(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c})^2}{\boldsymbol{1}} = \frac{\boldsymbol{c}^2}{\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{c}^2 = \left[\boldsymbol{c}^2\right]$$

$S_{ад}^2 =$

$F =$

Проверим двухстороннее неравенство $\dfrac{1}{F_{табл}^{(d-1),(n-m)}} \le \dfrac{S_{ад}^2}{S_{оп}^2} \le F_{табл}^{(n-m),(d-1)}$, где $F_{табл}^{(n-m),(d-1)} = 6.59$

$$\frac{S_{ад}^2}{S_{оп}^2} =$$

Если окажется, что $\dfrac{\boldsymbol{S_{ад}^2}}{\boldsymbol{S_{оп}^2}} \le \mathbf{6.59}$, то с вероятностью, равной 95 %, можно утверждать, что наше предположение о линейной зависимости между величинами $\boldsymbol{y_i} = \boldsymbol{T_i}$ и $\boldsymbol{x} = \sqrt{\boldsymbol{l}}$ действительно описывается зависимостью $y = A\cdot x$.

8. Вывод:

9. В координатах XOY построим график зависимости $y = A\cdot x$, там же нанесём звездочками экспериментальные данные (x_i, y_i) . (в качестве $\boldsymbol{x}$ возьмём $\sqrt{\boldsymbol{l}}$ **,** в качестве $\boldsymbol{y}$ возьмём $\boldsymbol{T}$ **).**