ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 0-1: ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Студент____ группа________________

Допуск ______________________ Выполнение _______________ Защита _______________

Цель работы: получение и закрепление навыков обработки результатов прямых, косвенных и совместных измерений.
Приборы и материалы: математический маятник, измерительная линейка, секундомер.

Основные теоретические сведения

Одной из важнейших задач физического эксперимента является измерение различных величин. Процесс измерения состоит в том, что измеряемую величину сравнивают с другой величиной, принятой за эталон (например, длину измеряют в метрах, массу в килограммах и т. д.)
Любые измерения никогда не бывают абсолютно точными из–за всевозможных погрешностей, возникающих в процессе измерения. В связи с этим всегда возникает разброс результатов измерений, что требует специальной математической обработки полученных результатов. В процессе этой обработке вычисляется среднее значение результатов измерения, которое является наиболее близким по величине к истинному значению, а также производится оценка погрешности или, как говорят, ошибки окончательного результата.
Определение погрешности измерения является обязательным элементом любого эксперимента.

Среди множества погрешностей измерений основными являются следующие:

Систематические погрешности - это погрешности, возникающие следствие неправильной калибровки или настройки шкалы прибора (например, сбитый ноль прибора, тепловое расширение линейки и т. д.), ошибочности метода измерений и т.п.
Основной особенностью систематических погрешностей является то, что измеренные значения отклоняются от истинного значения всегда в одну и ту же сторону и на одну и туже величину. Повторными измерениями эти ошибки устранить или уменьшить нельзя, однако их можно оценить, проведя измерения более точными приборами, и в дальнейшем эту ошибку учитывать при вычислениях или изменить методику измерений.

К систематическим погрешностям можно отнести:

приборные погрешности – это погрешности, обусловленные тем, что практически любое измерительное устройство обладает ограниченной степенью точности, например, линейкой с ценой деления 1 см нельзя измерить длину стола с точностью до одного миллиметра и т. п. Практически для большинства измерительных устройств (за исключением электроизмерительных приборов) в ***качестве приборной погрешности*** принимается величина, равная ***половине цены деления шкалы данного прибора***.
погрешности округления - это погрешности, обусловленные тем, что при расчетах приходится различные табличные величины всегда округлять до какого–то определенного разряда. ***В качестве ошибки округления*** принимают величину, равную ***половине единицы последнего разряда округлённой табличной величины***.

Случайные погрешности – это погрешности, возникающие вследствие изменчивости условий эксперимента, несовершенства органов чувств человека и т. д.
Основной особенностью случайных погрешностей является то, что измеренные значения отклоняются от истинного значения то в одну, то в другую сторону на произвольную величину. Случайные погрешности можно уменьшить, увеличивая число измерений, причём с ростом числа таких измерений ошибка уменьшается пропорционально $\frac{1}{\sqrt{n}}$, (где n - число измерений в одинаковых условиях). Сами случайные погрешности подчиняются законам теории вероятности и математической статистики.
Чаще всего случайные погрешности проявляются в виде разброса показаний прибора. В результате этого разброса измеряемая величина случайным образом отклоняется от истинного значения в разные стороны на произвольную величину.

Промахи – это погрешности, возникающие вследствие невнимательности экспериментатора или недостаточной его квалификации и опыта.
Их можно наблюдать, например, при неправильном отсчете измеряемого значения (неправильное определение цены деления прибора и т. д.). Кроме того, к промахам могут привести внезапные сильные внешние влияния на измерительное устройство, повреждения или помехи, которые нельзя считать субъективными и т. п..
Основной особенностью промахов является то, что их величина резко выделяется из серии однотипных измерений. При обработке результатов эксперимента промахи необходимо исключить и по – возможности провести повторные измерения.

В методах математической статистики для обработки результатов измерений, в которых присутствуют только случайные погрешности, используется понятие ***генеральной совокупности значений измеряемой величины*** и понятие ***выборки.*** Множество всех допустимых значений, которые может принимать та или иная величина, называется **генеральной совокупностью значений данной величины**.

Производя n измерений, мы получим n значений измеряемой величины: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Данная совокупность значений называется **выборкой** для величины x объемом n. Очевидно, что выборка переходит в генеральную совокупность, если ее объем, т.е. число измерений n, стремится к максимально возможному.

Для обработки случайных погрешностей вводят следующие величины:

Средним значением выборки объемом n для величины x называется величина, равная :

$$< x >= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \qquad (0.1)$$

Среднее значение, как правило, оказывается наиболее близким по величине к истинному значению, чем отдельные измерения.

Дисперсией выборки объемом n для величины x называется величина, равная :

$$S_x^2 = \frac{(x_1 - < x >)^2 + (x_2 - < x >)^2 + \ldots + (x_n - < x >)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - < x >)^2}{n-1}. \qquad (0.2)$$

Дисперсия выборки является мерой отклонения измеренных значений x_i *от их среднего значения* $< x >$.

Дисперсией среднего значения объемом n для величины x называется величина, равная :

$$S_{<x>}^2 = \frac{(x_1 - < x >)^2 + (x_2 - < x >)^2 + \ldots + (x_n - < x >)^2}{n(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - < x >)^2}{n(n-1)}. \qquad (0.3)$$

Дисперсия среднего значения является мерой отклонения среднего значения выборки от истинного значения измеряемой величины.

Величина $S_{<x>}$, равная $S_{<x>} = \sqrt{S_{<x>}^2}$ называется ***среднеквадратичным отклонением среднего значения*** от истинного значения x_0.

Очевидно, что среднее значение и дисперсия зависят как от измеренных значений x_i , так и от объема выборки n. Причем, при увеличении n до бесконечности среднее значение и дисперсия выборки стремятся, соответственно, к среднему значению и дисперсии генеральной совокупности. Дисперсию генеральной совокупности обычно обозначают σ_x^2.

Результаты измерений величины x являются случайными числами, поскольку при измерениях присутствуют случайные погрешности измерений. Наиболее часто вероятность получения результата измерений, в которых присутствуют только случайные погрешности, описывается распределением Гаусса.

Плотностью распределения величины x называется функция $\varphi(x)$, такая, что вероятность dp получить измеряемую величину в интервале от x до $x + dx$ равна $dp = \varphi(x) \cdot dx$,

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma_x} e^{-\frac{(x - x_{ист})^2}{2 \cdot \sigma_x^2}}$ - называется ***функцией распределения Гаусса*** (0.4)

На рис 0.1 представлен график функции $\varphi(x)$. Важнейшим свойством ее является то, что вероятность получения результата однократного измерения $x_1 \le x \le x_2$ равна площади под кривой в пределах x_1 до x_2. Например, в пределах от $x_0 - \sigma_x$ до $x_0 + \sigma_x$ вероятность равна **0.683**, в пределах от $x_0 - 2 \cdot \sigma_x$ до $x_0 + 2 \cdot \sigma_x$ она равна **0.954** и в пределах $x_0 - 3 \cdot \sigma_x$, до $x_0 + 3 \cdot \sigma_x$ она будет **0.997**. Следовательно, из **1000** измерений **683** наиболее вероятно попадут в интервал $x_0 \pm \sigma_x$, **954** - в интервал $x_0 \pm 2 \cdot \sigma_x$, а **997** соответственно в интервал $x_0 \pm 3 \cdot \sigma_x$.

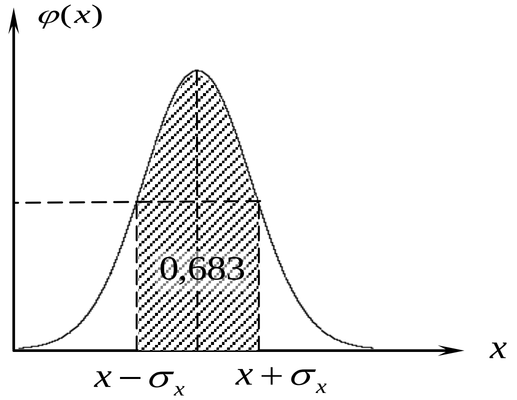


Рисунок 0.1. График функции распределения Гаусса.

Прямые измерения

***Прямыми** называются измерения, при которых искомая величина определяется с помощью специально предназначенного для этого прибора* (например, температуру определяют с помощью ТЕРМОМЕТРА, длину стола с помощью ЛИНЕЙКИ и т. д.).

Целью физического эксперимента при проведении прямых измерений является определение среднего значения искомой величины и, так называемого, доверительного интервала, в котором находится истинное значение данной величины.

Окончательный ответ при обработке прямых измерений записывается в виде:

$$x = \langle x \rangle \pm t_{p,k} \cdot S_{<x>},$$

где $\langle x \rangle$ - среднее значение искомой величины x,

$S_{<x>}$ - среднеквадратичное отклонение среднего значения величины x,

$t_{p,k}$ - коэффициент Стьюдента, значение которого зависит от числа измерений n и вероятности p доверительного интервала.

Коэффициент Стьюдента находится из таблицы 0.1. Зная количество измерений n, и задавая вероятность p доверительного интервала, находят величину параметра $t_{p,k}$ по таблице, где k - число степеней свободы ($k = n-1$).

Таблица 0.1

Значение параметра Стьюдента в зависимости от вероятности p и числа степеней свободы $k = n-1$

k	Вероятность p							
	0,6	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**	**0,999**
1	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
2	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,2
3	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
4	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,8
5	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
6	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
7	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
8	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0

При обработке прямых измерений ответ должен записываться так:

$$T = \left(1.78 \pm 2.8 \cdot 4.4 \cdot 10^{-2}\right)c = \left(1.780 \pm 0.012\right)c, \text{ при } p = 0.95 \text{ и } n = 5.$$

Данная запись означает следующее: ***было проведено пять измерений (*** *n =5)* ***и истинное значение величины T с вероятностью*** *p = 95% (p = 0.95)* ***находится в интервале*** $\left(1.780 - 0.012\right)c \le T \le \left(1.780 + 0.012\right)c$.

В том случае, если при проведении прямых измерений присутствуют кроме случайных погрешностей и другие виды погрешностей, необходимо также учитывать их влияние на искажения полученных результатов. В этом случае дисперсию прямых измерений находят по формуле: $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_n^2$,

где S_1^2 *- дисперсия измерений от случайных погрешностей,* S_2^2 *- дисперсия измерений от приборных погрешностей и т.д.*

Рассмотрим пример обработки результатов прямых измерений.

Допустим, в результате пяти измерений получены следующие значения времени движения тела на каком - то участке пути: **6 с; 7с; 6с; 5с; 6с**.

При обработке прямых измерений ответ необходимо записывать следующим образом:

$$x = \langle x \rangle \pm t_{p,k} \cdot S_{<x>},$$

где $\langle x \rangle$ - среднее значение искомой величины, $t_{p,k} \cdot S_{\langle x \rangle}$ - доверительный интервал,

$S_{<x>}$ - среднеквадратичное отклонение среднего значения,

$t_{p,k}$ - коэффициент Стьюдента, который находится по таблице 0.1 в зависимости от вероятности доверительного интервала p (задаётся экспериментатором) и числа степеней свободы $k = n-1$, где n – число измерений.

1. Находим среднее значение измерений по формуле (0.1)

$$< x >= \frac{6c+7c+6c+5c+6c}{5} = 6c\,.$$

2. Дисперсию среднего значения находим по формуле (0.3.)

$$S^2_{<x>} = \frac{(6c-6c)^2+(6c-7c)^2+(6c-6c)^2+(6c-6c)^2+(6c-6c)^2}{5\cdot(5-1)} \approx 0{,}05c^2$$

3. Среднеквадратичное отклонение среднего значения равно

$$S_{<x>} = \sqrt{S^2_{<x>}} = \sqrt{0{,}05c^2} = 0{,}22c\,.$$

3. Для вероятности, например, $p = 0{,}95$ и числа измерений $n = 5$, находим значение параметра $t_{p,k}$ из таблицы 0.1: $t_{p,k} = 2.8$

4. Получаем $x = \left(6 \pm 2{,}8\cdot 0.22\right)c = \left(6{,}0 \pm 0{,}6\right)c\,.$

5 Окончательный результат записываем в виде: $x = \left(6{,}0 \pm 0{,}6\right)c$ при $p = 0{,}95$ и $n = 5$

Косвенные измерения.

Часто в процессе проведения физических исследований нет специального прибора для измерения необходимой величины y, поэтому приходится проводить косвенные измерения.

Косвенными *называются измерения, при которых искомая величина рассчитывается по какой – либо функциональной зависимости с применением результатов прямых измерений.*

Косвенные измерения обычно проводятся, в том случае, когда прямые измерения провести не удаётся (в основном из-за того, что нет соответствующего прибора)

Косвенные измерения можно обрабатывать двумя способами:

Первый способ: по методике обработки прямых измерений,
Второй способ: с помощью частных производных.

Первый способ: по методике обработки прямых измерений,

Согласно этому методу по результатам прямых измерений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ находят по формуле $y = f(x)$ значения косвенных измерений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, затем по формулам (0.1) и (0.3) вычисляют среднее значение $< y >$ и дисперсию среднего значения косвенных измерений $S^2_{<y>}$. Используя эти величины, находят доверительный интервал и записывают окончательный ответ в виде:

$$y = < y > \pm t_{p,k}\cdot S_{<y>}\,.$$

Рассмотрим на следующем примере порядок обработки косвенных измерений первым способом.
Пусть для некоторого бегуна на 100-метровке пятью наблюдателями получены следующие значения времени пробега в секундах $t_i \in \{13{,}2c; 13{,}4c; 13{,}5c; 13{,}1c; 13{,}6c\}$. Необходимо найти величину средней скорости бегуна на этой дистанции.

1. среднюю скорость бегуна можно определить по формуле $\upsilon = \dfrac{S}{t}$. Следовательно:

$$\upsilon_1 = \frac{S_1}{t_1} = \frac{100\,м}{13{,}2\,c} = 7{,}58\,\frac{м}{c},\quad \upsilon_2 = \frac{S_2}{t_2} = \frac{100\,м}{13{,}4c} = 7{,}46\,\frac{м}{c},\quad \upsilon_3 = \frac{100\,м}{13{,}5c} = 7{,}41\,\frac{м}{c},\quad \upsilon_4 = \frac{100\,м}{13{,}1c} = 7{,}64\,\frac{м}{c},$$

$$\upsilon_5 = \frac{100\,м}{13{,}6c} = 7{,}35\,\frac{м}{c}\,.$$

2. находим среднее значение скорости

$$< \upsilon >= \frac{\left(7{,}58+7{,}46+7{,}41+7{,}64+7{,}35\right)\frac{м}{c}}{5} = 7{,}49\,\frac{м}{c}$$

Находим дисперсию среднего значения скорости

$$S^2_{<\upsilon>} = \frac{\left(7{,}58\,\frac{м}{c} - 7{,}49\,\frac{м}{c}\right)^2 + \left(7{,}46\,\frac{м}{c} - 7{,}49\,\frac{м}{c}\right)^2 + \ldots}{5(5-1)} = 2{,}74\cdot 10^{-3}\,\frac{м^2}{c^2}$$

Находим среднеквадратичное отклонение

$$S^2_{<\upsilon>} = \sqrt{2{,}74\cdot 10^{-3}\,\frac{м^2}{c^2}} = 0{,}05\,\frac{м}{c}$$

3. Для вероятности, например, $p = 0{,}9$ и числа измерений $n = 5$, находим значение параметра $t_{p,k}$ из табл. 0.1:

$$t_{p,k} = 2.1$$

4. Предварительный результат записываем в виде

$$\upsilon = (7.49 \pm 2.1 \cdot 0.05)\frac{м}{с} = (7.49 \pm 0.11)\frac{м}{с}$$

5. Окончательный результат записываем в виде

$$\upsilon = (7.49 \pm 0.11)\frac{м}{с} \text{ для } p = 0{,}9 \text{ и числа измерений } n = 5.$$

Такой ответ означает, что было проведено 5 измерений и доверительный интервал записан с вероятностью 95% (то есть, экспериментатор гарантирует, что истинное значение искомой величины с вероятностью 95% находится в интервале значений $\langle \upsilon \rangle - t_{p,k} S_{\langle \upsilon \rangle} \le \upsilon \le \langle \upsilon \rangle + t_{p,k} S_{\langle \upsilon \rangle}$, то есть $(7.49 - 0.11)\frac{м}{с} \le \upsilon \le (7.49 + 0.11)\frac{м}{с}$.

Второй способ обработки: с помощью частных производных.

Часто первый способ обработки экспериментальных данных оказывается трудоемким, либо эксперименты очень дорогими, поэтому много измерений провести не удаётся. В этом случае результаты эксперимента обрабатывают вторым способом: методом частных производных.

Окончательный ответ должен быть записан в следующем виде: $y = \langle y \rangle \pm S_y$

Возможны два разных случая:

Первый случай: искомая величина является функцией ***одной переменной*** $y = f(x)$.

Среднее значение косвенного измерения $< y >$ находят путем подстановки соответствующего среднего значения прямых измерений величины x в следующее равенство $< y > = f(< x >)$.

Дисперсию опыта S_y^2 определяют по формуле:

$$S_y^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 S_x^2, \tag{0.7}$$

Среднеквадратичное отклонение по формуле: $S_y = \sqrt{S_y^2}$,

Окончательный ответ записывается в виде: $y = \langle y \rangle \pm S_y$

Второй случай: искомая величина является ***функцией нескольких переменных*** $x, z, t, \ldots$: $y = f(x, z, t, \ldots)$.

Среднее значение косвенного измерения $< y >$ находят путем подстановки соответствующих средних значений прямых измерений величин $\langle x \rangle, \langle z \rangle, \langle t \rangle, \ldots$ в следующее равенство $\langle y \rangle = f(\langle x \rangle, \langle z \rangle, \langle t \rangle, \ldots)$.

Дисперсию опыта S_y^2 определяют по формуле:

$$S_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 S_x^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 S_z^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 S_t^2 + \ldots \tag{0.9}$$

где $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial t}$ - частные производные от функции $y = f(x, z, t, \ldots)$.(частные производные находятся как обычные производные в предположении, что какая-то одна величина является переменной, а остальные величины принимаются за константы).

Число слагаемых в уравнении 0.9 определяется количеством переменных в уравнении функции.

Среднеквадратичное отклонение рассчитывают по формуле: $S_y = \sqrt{S_y^2}$,

Окончательный ответ записывают в виде: $y = \langle y \rangle \pm S_y$

Рассмотрим на следующем примере порядок обработки косвенных измерений вторым способом.

Пусть для некоторого бегуна на 100-метровке пятью наблюдателями получены следующие значения времени пробега в секундах $t_i \in \{13{,}2\,с; 13{,}4\,с; 13{,}5\,с; 13{,}1\,с; 13{,}6\,с\}$. Необходимо найти величину средней скорости бегуна на этой дистанции.

1. Находим среднее значение времени

$$< t > = \frac{13{,}2\,с + 13{,}4\,с + 13{,}5\,с + 13{,}1\,с + 13{,}6\,с}{5} = 13{,}36\,с$$

2. Находим среднее значение скорости

$$<v> = \frac{S}{<t>} = \frac{100\,м}{13{,}36\,c} = 7.49\,\frac{м}{c}$$

3. Находим формулу для определения дисперсии скорости. Для этого рассчитываем частные производные

$$\frac{\partial v}{\partial S} = \frac{\partial\left(\frac{S}{t}\right)}{\partial S} = \frac{1}{t}\ ; \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial\left(\frac{S}{t}\right)}{\partial t} = -\frac{S}{t^2}$$

Получаем формулу для дисперсии скорости

$$S_v^2 = \left(\frac{1}{<t>}\right)^2 \cdot S_S^2 + \left(-\frac{<S>}{<t>^2}\right)^2 \cdot S_t^2 = \frac{1}{<t>^2}\cdot S_S^2 + \frac{<S>^2}{<t>^4}\cdot S_t^2$$

Погрешность в определении длины пути S_s находим как приборную погрешность. Полагая, что дистанция измерялась лентой с ценой деления 1см, получаем погрешность измерений расстояния $S_{<S>} = 0.5\,см = 0{,}005\ м$. Дисперсию времени S_t^2 определим по формуле $S_t^2 = \frac{(t_1 - <t>)^2 + (t_2 - <t>)^2 + \ldots + (t_5 - <t>)^2}{5-1} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(t_i - <t>)^2}{5-1}$.

Получим $S_t^2 = 0.086\ c^2$

Далее вычисляем дисперсию и среднеквадратичное отклонение скорости

$$S_{<v>}^2 = \frac{1}{(13{,}36\,c)^2}\cdot(0{,}005\,м)^2 + \frac{(100\,м)^2}{(13{,}36\,c)^4}\cdot(0{,}093\,c)^2 = 0{,}00717\ \frac{м^2}{c^2} = 7{,}17\cdot 10^{-3}\,\frac{м^2}{c^2}$$

$$S_{<v>} = \sqrt{0{,}00717\,\frac{м^2}{c^2}} = 0{,}09\,\frac{м}{c}$$

4. Записываем окончательный результат: $v = (7{,}49 \pm 0{,}09\,)\,\frac{м}{c}$.

Следует обратить внимание на то, что при втором способе обработки доверительный интервал записывается без учета параметра Стьюдента, поэтому этот способ обработки косвенных измерений является менее строгим по сравнению с первым.

Рассмотрим ещё один пример: **Определим объём цилиндра**

Объём цилиндра находится по формуле $V = \pi R^2 h$ или $V = \frac{1}{4}\pi d^2 h$ (1)

Метод прямых измерений

Сначала произведём несколько замеров радиусов R_i (а лучше диаметров d_i) цилиндра и его высоты h_i.

Для того, чтобы можно было статистически грамотно обработать результаты опыта, необходимо провести минимум по три замера, а лучше по пять, например

№ замера	d_i, $10^{-3}\,м$	h_i, $10^{-3}\,м$
1	20.3	10.1
2	20.5	10.2
3	19.9	9.9
4	20.2	10.0
5	20.1	9.9

При обработке методом прямых измерений окончательный ответ должен быть записан в виде

$V = \langle V\rangle \pm t_{p,k} S_{\langle V\rangle}$, для $n = 5$ и $p = 0.95$.

Среднее значение объёма цилиндра находим по формуле: $\langle V\rangle = \frac{\sum V_i}{n} = \frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}{n}$,

где $V_i = \pi R_i^2 h_i$ или $V_i = \frac{1}{4}\pi d_i^2 h_i$ - это результат *i*-го измерения.

Среднее квадратичное отклонение среднего значения объёма цилиндра находим по формуле:

$$S_{\langle V\rangle} = \sqrt{\frac{\sum\left(V_i - \langle V\rangle\right)^2}{n(n-1)}}.$$

Коэффициент Стьюдента определяем из таблицы 1 в зависимости от числа степеней свободы $k = n-1$ и вероятности доверительного интервала ***p***, который выбирает сам экспериментатор.

Таблица 1

Значение параметра Стьюдента в зависимости от вероятности p и числа степеней свободы $k = n-1$.

k	Вероятность p							
	0,6	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**	**0,999**
1	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
2	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,2
3	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
4	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,8
5	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
6	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
7	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
8	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0

Методом прямых измерений обычно пользуются, когда измерения заметно различаются друг от друга (например, из-за того, что цилиндр изготовлен не очень качественно).

Метод частных производных

Если такой же цилиндр выточить из стали на станке, то измерения могут не отличаться друг от друга, например

№ замера	d_i, 10^{-3} *м*	h_i, 10^{-3} *м*
1	20.3	10.1
2	20.3	10.1
3	20.3	10.1
4	20.3	10.1
5	20.3	10.1

Если измерения не отличаются друг от друга по величине или измерения очень дорогостоящие, то определить погрешность полученного результата можно методом частных производных.

В этом случае окончательный ответ должен быть записан в следующем виде: $y = \langle y \rangle \pm S_y$

При этом возможны два случая:

Первый случай: искомая величина является функцией только одной переменной: $y = f(x)$.

В этом случае среднее значение косвенного измерения $< y >$ находят путем подстановки соответствующего среднего значения прямых измерений величины x в исходное уравнение, то есть: $< y >= f(< x >)$.

Дисперсию опыта S_y^2 определяют по формуле:

$$S_y^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 S_x^2,$$

Среднеквадратичное отклонение по формуле: $S_y = \sqrt{S_y^2}$,

Окончательный ответ записывается в виде: $y = \langle y \rangle \pm S_y$

Второй случай: искомая величина является функцией нескольких переменных $x, z, t, \ldots$: $y = f(x, z, t, \ldots)$.

В этом случае среднее значение косвенного измерения $< y >$ находят путем подстановки соответствующих средних значений прямых измерений величин $\langle x \rangle, \langle z \rangle, \langle t \rangle, \ldots$ в исходное уравнение, то есть $\langle y \rangle = f(\langle x \rangle, \langle z \rangle, \langle t \rangle, \ldots)$.

Дисперсию опыта S_y^2 определяют по формуле:

$$S_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 S_x^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 S_z^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 S_t^2 + \ldots \quad (2)$$

где $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial t}$ - частные производные от функции $y = f(x, z, t, \ldots)$ (частные производные находятся как обычные производные в предположении, что какая-то одна величина является переменной, а остальные величины принимаются за константы).

Число слагаемых в уравнении (2) равно числу переменных в уравнении функции $y = f(x, z, t, \ldots)$.

Среднеквадратичное отклонение рассчитывают по формуле: $S_y = \sqrt{S_y^2}$,

Окончательный ответ записывают в виде: $y = \langle y \rangle \pm S_y$

Следует обратить внимание на то, что при обработке измерений методом частных производных доверительный интервал записывается без учета параметра Стьюдента, поэтому этот способ обработки косвенных измерений является менее строгим по сравнению с методом прямых измерений.

Обработаем теперь результаты наших замеров для цилиндра методом частных производных.

№ замера	d_i , 10^{-3} *м*	h_i , 10^{-3} *м*
1	20.3	10.1
2	20.5	10.2
3	19.9	9.9
4	20.2	10.0
5	20.1	9.9

Ответ должен быть записан в виде: $V = \langle V \rangle \pm S_V$.

1. Находим сначала средние значения диаметра и высоты цилиндра

$$\langle d \rangle = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_5}{5} \quad \text{и} \quad \langle h \rangle = \frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_5}{5} .$$

2. Находим среднее значение объёма цилиндра по формуле $\langle V \rangle = \frac{1}{4}\pi \langle d \rangle^2 \langle h \rangle$.

3. Найдём частные производные с учётом количества переменных в нашей функции $V = \frac{1}{4}\pi d^2 h$.

В виду того, что число π является приближённой константой и степень его округления будет влиять на полученные результаты, то его также необходимо рассматривать как переменную величину и учесть при расчётах погрешность его округления.

Таким образом, у нас получается функция трёх переменных: d , h и π .

Тогда дисперсию опыта найдём по формуле $S_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)^2 S_d^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 S_h^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)^2 S_\pi^2$,

где

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \left(\frac{1}{4}\pi d^2 h\right)'_d = 2\frac{1}{4}\pi d\, h = \frac{1}{2}\pi d\, h ; \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \left(\frac{1}{4}\pi d^2 h\right)'_h = \frac{1}{4}\pi d^2 ; \quad \frac{\partial V}{\partial \pi} = \left(\frac{1}{4}\pi d^2 h\right)'_\pi = \frac{1}{4} d^2 h .$$

Окончательно находим: $S_V^2 = \left(\frac{1}{2}\pi d\, h\right)^2 S_d^2 + \left(\frac{1}{4}\pi d^2\right)^2 S_h^2 + \left(\frac{1}{4} d^2 h\right)^2 S_\pi^2$ и $S_V = \sqrt{S_V^2}$.

При этом величины S_d^2 и S_h^2 находим как дисперсии опыта по формулам

$S_d^2 = \frac{\sum\left(d_i - \langle d \rangle\right)^2}{n-1}$ и $S_h^2 = \frac{\sum\left(h_i - \langle h \rangle\right)^2}{n-1}$, а величину S_π^2 находим как квадрат табличной погрешности.

Напомним, что:

- в качестве табличной погрешности принимается величина, равная половине единицы последнего разряда округлённой табличной величины,

(то есть, если величина округлена до сотых, то погрешность равна половине одной сотой (0,01/2=0,005), если величина округлена до тысячных, то погрешность равна половине одной тысячной(0,001/2=0,0005)).

- в качестве приборной погрешности принимается величина, равная половине цены деления шкалы прибора.

Совместные измерения. Метод наименьших квадратов.

Совместными называются измерения, при которых одновременно определяются значения функции и значения аргументов.

Совместные измерения проводятся для определения неизвестных коэффициентов А, В и т.д. в какой-либо функциональной зависимости (после определения неизвестных коэффициентов можно проводить косвенные измерения).

Рассмотрим совместные измерения и порядок их обработки на следующем примере. Допустим, величина y и величина x связаны линейной зависимостью, т.е.:

$$y = A \cdot x \tag{0.10}$$

Если величины x, y связанные функционально, измеряются одновременно, то такие измерения будут совместными. В этом случае, задачей совместных измерений будет определение коэффициента A.

Для этого проведем n измерений величин x, y, последовательно измеряя их в процессе эксперимента, в результате получим n пар значений $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$. Отметим на плоскости XOY экспериментальные точки, соответствующие полученным данным (рис. 0.3).

Вследствие случайных погрешностей полученные экспериментально точки не будут лежать на одной прямой. Но можно сформулировать критерий для выбора углового коэффициента прямой, в соответствии с которым ошибка измерения этого коэффициента будет минимальной. Этот критерий в математической статистике получил название **критерия наименьших квадратов**.

Пусть для некоторого определенного значения A прямая $y = A \cdot x$ пройдет так, как это показано на рис 0.3. Для $x = x_i$ ордината y при этом равна $A \cdot x_i$, экспериментальное значение y для $x = x_i$ равно y_i, т.е. существует отклонение экспериментального значения y от вычисленного значения $A \cdot x_i$. Эти отклонения для каждого измеренного значения величины y могут отличаться как по величине, так и по знаку

$$\Delta_i = y_i - A \cdot x_i \tag{0.11}$$

Согласно критерию наименьших квадратов, угловой коэффициент прямой $y = A \cdot x$ должен быть таким, чтобы сумма квадратов отклонений ординат прямой $y = A \cdot x$ при тех же значениях аргумента была минимальной. Это условие метода наименьших квадратов математически записывается так:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - A \cdot x_i)^2 \to \min \tag{0.12}$$

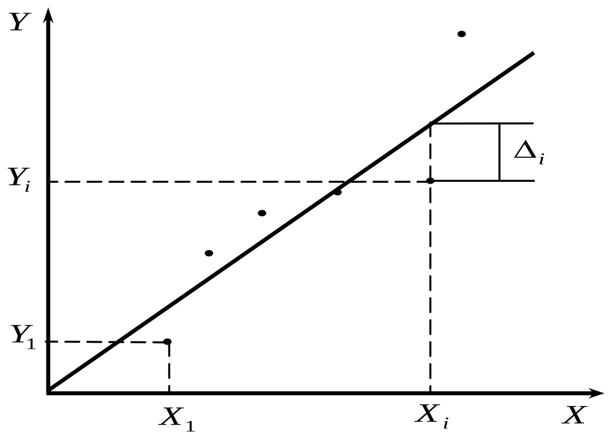


Рис. 0.3

В выражении (0.12) остаточная сумма квадратов Q является функцией неизвестного параметра A. Минимальное значение этой функции достигается тогда, когда ее производная при некотором значении A равна нулю, т.е.:

$$\frac{dQ}{dA} = 0 \tag{0.13}$$

Следовательно, взяв от суммы (0.12) производную по параметру A и приравняв ее к нулю, получим уравнение:

$$\frac{d}{dA}\left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - A \cdot x_i)^2\right] = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - A \cdot x_i) \cdot (-x_i) = 0 \tag{0.14}$$

Это уравнение линейное относительно А , и из него легко можно получить формулу для нахождения неизвестного параметра A:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{0.15}$$

Параметр A является случайной величиной. С помощью методов математической статистики можно найти формулу для дисперсии этого параметра

$$S_A^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - A\cdot x_i)^2}{n-1} \tag{0.16}$$

Таким образом, метод наименьших квадратов позволяет определить по результатам n совместных измерений, как величину неизвестного параметра A, так и его дисперсию S_A^2. В ряде случаев функциональная зависимость между величинами y и x может отличаться от простейшей линейной зависимости (0.10).

Часто приходится использовать несколько более сложную зависимость, неизвестными уже могут быть не один, а два параметра, которые в результате совместных измерений необходимо определить. Такой зависимостью, например, является линейная функция вида

$$y = A\cdot x + B \tag{0.17}$$

Используя метод наименьших квадратов, можно получить расчетные формула для определения параметров A и B. Эти формулы записываются в виде

$$A = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \qquad B = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{0.18}$$

Величина дисперсии этих параметров находится по формулам

$$S_A^2 = \frac{n}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \cdot \frac{Q}{n-2} \qquad S_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \cdot \frac{Q}{n-2},$$

где $Q = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - A\cdot x_i - B\right)^2$

Проверка статистических гипотез. Критерий Фишера

Первый вопрос, который нас интересует после вычисления коэффициента A, это проверка соответствия (0.10) экспериментальным данным x_i, y_i.

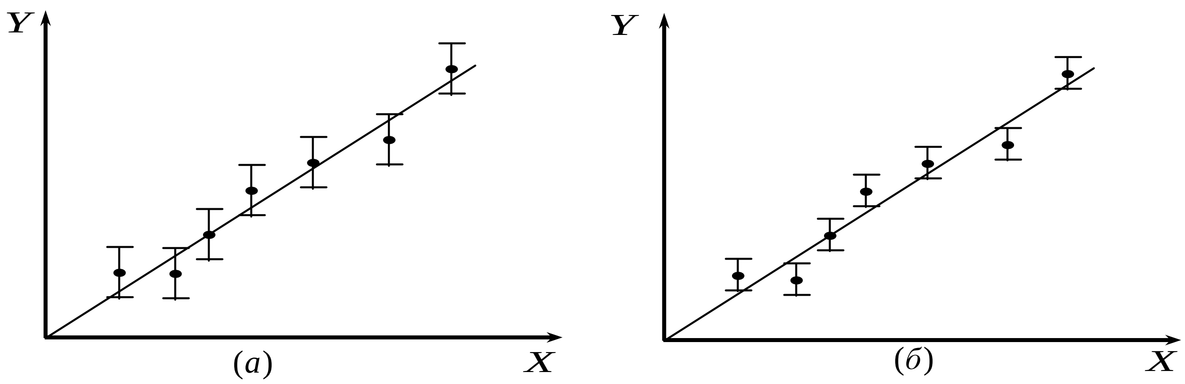


Рис. 0.4.

На рисунках (0.4 а), (0.4 б) линией показана зависимость $y = A\cdot x$, полученная по методу наименьших квадратов. Точками показаны экспериментальные данные с разбросом, равным $\pm 2\cdot S_y$. Очевидно, что зависимость $y = A\cdot x$ соответствует экспериментальным данным только в первом случае.

Однако это качественные соображения, а нам нужна количественная оценка. Для характеристики среднего разброса точек относительно $y = A\cdot x$ вполне подходит остаточная сумма квадратов. Неудобство состоит в том, что остаточная сумма квадратов зависит от числа коэффициентов в уравнении. Кроме того, если ввести столько коэффициентов, сколько имеется независимых измерений, то мы получим остаточную сумму, равную нулю. Поэтому предпочитают делить остаточную сумму Q квадратов на число степеней свободы.

Числом степеней свободы в математической статистике называется разность между числом измерений n и числом коэффициентов m, входящих в уравнение $y = f(x, A_1, A_2, \ldots, A_m)$, т.е. $k = n - m$.

Остаточная сумма квадратов Q*, деленная на число степеней свободы, называется* ***дисперсией адекватности***, т.е.

$$S_{ад}^2 = \frac{Q}{n-m} \tag{0.19}$$

Для зависимости $y = A \cdot x$ дисперсия адекватности равна $S_{ад}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - A \cdot x_i)^2}{n-1}$, (0.20)

где $n-$ число совместных измерений величин (x_i, y_i).

Для проверки соответствия зависимости $y = A \cdot x$ экспериментальным данным используют F - критерий (критерий Фишера), при этом вычисляют следующее соотношение

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_{оп}^2} \tag{0.21}$$

где $S_{оп}^2$ - есть дисперсия опыта с числом степеней свободы, равным $n-1$, где n число измерений, т.е.

$$S_{оп}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \langle y \rangle)^2}{d-1}, \tag{0.22}$$

где d - число прямых измерений величины y_i.

Из предыдущего равенства видно, что параметр F является величиной случайной и для него существует функция распределения, которая впервые была получена Фишером. Из **табл. 0-2** находят при известном числе степеней свободы дисперсии $(n-m)$, $(d-1)$ и заданной вероятности p, значения $F_{табл}^{(n-m),(d-1)}$

Далее проверяют двухстороннее неравенство

$$\frac{1}{F_{табл}^{(n-m),(d-1)}} \le \frac{S_{ад}^2}{S_{оп}^2} \le F_{табл}^{(n-m),(d-1)} \tag{0.23}$$

В том случае, когда $S_{ад}^2 \ge S_{оп}^2$, достаточно производить одностороннюю оценку, т.е.

$$\frac{S_{ад}^2}{S_{оп}^2} \le F_{табл}^{(n-m),(d-1)} \tag{0.24}$$

Если данные условия выполняются, то с вероятностью, равной p,можно утверждать, что зависимость $y = A \cdot x$ соответствует полученным экспериментальным данным.

Таблица 0.2:

Значения критерия Фишера $F_{табл}^{(n-m),(d-1)}$ при надежности $p = 0{,}95$ в зависимости от числа степеней свободы сравниваемых величин дисперсий.

d - 1	**n - m**		
	3	4	5
2	**19.00**	**19.16**	**19.25**
3	**9.55**	**9.28**	**9.12**
4	**6.94**	**6.59**	**6.39**
5	**5.79**	**5.41**	**5.19**

Контрольные вопросы

1. Дайте определение основным видам погрешностей и расскажите об их особенностях. Приведите примеры.
2. Как установить наличие «промахов» при проведении измерений? Как отбраковываются промахи?
3. Дайте определение среднего значения выборки, дисперсии опыта, дисперсии среднего значения и среднеквадратичного отклонения.
4. Что такое прямые, косвенные и совместные измерения? Дайте их определения и приведите примеры.
5. Объясните на числовом примере порядок обработки прямых измерений. Для чего используется коэффициент Стьюдента?
6. Объясните на примере два метода обработки косвенных измерений (по методике прямых измерений и через частные производные). Как записывают окончательный результат прямых и косвенных измерений?
7. Для совместных измерений на примере линейной зависимости объясните сущность метода наименьших квадратов.

Пример оформления лабораторной работы

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 0-1:

Обработка результатов физического эксперимента на примере определения ускорения свободного падения с помощью математического маятника.

Студент ***Иванов Андрей*** группа **ТМ -12**

Допуск________________________________Выполнение____________________Защита__________________

Цель работы: получение и закрепление навыков обработки результатов прямых, косвенных и совместных измерений.

Приборы и материалы: математический маятник, измерительная линейка, секундомер.

Упражнение 1. **Порядок обработки прямых измерений. Определение периода колебаний математического маятника.**

Таблица 1

$N_{изм}$	1	2	3	4	5	$\sum$
T_i						
$T_i - \langle T \rangle$						
$\left(T_i - \langle T \rangle\right)^2$						

1. $< T >= \dfrac{T_1 + T_2 + \ldots + T_5}{5}$ $\qquad [< T >] =$

   $< T >=$

2. $\left[T_1 - \langle T \rangle\right] =$

   $T_1 - \langle T \rangle =$

   $\left[\left(T_1 - \langle T \rangle\right)^2\right] =$

   $\left(T_1 - \langle T \rangle\right)^2 =$

3. $S^2_{<T>} = \dfrac{(T_1 - < T >)^2 + (T_2 - < T >)^2 + \ldots + (T_5 - < T >)^2}{5 \cdot 4}.$

   $\left[S^2_{<T>}\right] =$

   $S^2_{\langle T \rangle} =$

4. $S_{<T>} = \sqrt{S^2_{<T>}}\,,$ $\qquad [S_{<T>}] =$

   $S_{\langle T \rangle} = \sqrt{S^2_{\langle T \rangle}} =$

5. $T =< T > \pm t_{p,k} S_{<T>}$, где для вероятности $p =$ и числа измерений $n =$, параметра Стьюдента $t_{p,k} =$

   Ответ: $T =$

Вывод:

Упражнение 2. **Обработка результатов косвенных измерений. Определение ускорения свободного падения**

Таблица 2

$N_{изм}$	T_i	$S_{<T>}$	l	$S_{<l>}$	$\langle g \rangle$	S_g
1						
2						
3						
4						
5						
$\sum$						

1. $< g > = \dfrac{4\pi^2 l}{< T^2 >}$, $[< g >] =$

$\langle g \rangle =$

2. $S_g^2 = \left(\dfrac{4\pi^2}{\langle T \rangle^2} \right)^2 S_l^2 + \left(\dfrac{-8\pi^2 l}{\langle T \rangle^3} \right)^2 S_T^2 + \left(\dfrac{8\pi \, l}{\langle T \rangle^2} \right)^2 S_\pi^2$;

$[S_g^2] =$

В качестве погрешности в определении длины нити математического маятника S_l возьмём квадрат приборной погрешности ***(в качестве приборной погрешности принимается величина, равная половине цены деления шкалы прибора).*** $S_l =$

В качестве погрешности числа π S_π возьмите табличную погрешность ***(в качестве табличной погрешности принимается величина, равная половине единицы последнего разряда округлённой табличной величины).***

$S_\pi =$

$S_T^2 = \dfrac{\sum \left(T_i - \langle T \rangle \right)^2}{n-1}$, где n – число измерений, $[S_T^2] =$

$S_T^2 =$

$S_g^2 =$

3. $S_g = \sqrt{S_g^2}$. $[S_g] =$ $S_g =$

4. $g = < g > \pm S_g$, $g =$

5.. $\varepsilon = \dfrac{\left| \langle g \rangle - g_{теория} \right|}{g_{теория}} \cdot 100\,\% =$

Вывод:

Упражнение 3. **Порядок обработки совместных измерений. Определение ускорения свободного падения**

Период колебаний математического маятника вычисляется по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Для того, чтобы воспользоваться методом обработки совместных измерений для зависимости $y = A \cdot x$ введём следующие обозначения: $y = T^2$; $x = l$; $A = \frac{4\pi^2}{g}$.

Таким образом, зная экспериментальную зависимость $T^2 = Al$ можем вычислить коэффициент A. Затем из соотношения $g = \frac{4\pi^2}{A^2}$ определим ускорение свободного падения.

Таблица 3

1	2	3	4	5	6	7	8
	l_i	T_i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	$(y_i - Ax_i)^2$
1							
2							
3							
4							
5							
$\sum$							

1. $[xy] =$ $\qquad$ $x_1 y_1 =$

2. $[x^2] =$ $\qquad$ $x_1^2 =$

3. $A = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ $\qquad$ $[A] =$

$A =$

4. $[y - Ax] =$ $\qquad$ $y_1 - Ax_1 =$

5. $S_A^2 = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - A x_i)^2}{n-1}$ $\qquad$ $[S_A^2] =$

$S_A^2 =$

6. $\langle g \rangle = \dfrac{4\pi^2}{A^2}$, $\qquad$ $[\langle g \rangle] =$

$\langle g \rangle =$

7. $S_g^2 = \left(\dfrac{8\pi}{A^2}\right)^2 S_\pi^2 + \left(-\dfrac{8\pi^2}{A^3}\right)^2 S_A^2$ $\qquad$ $[S_g^2] =$

$S_g^2 =$

8. $S_g = \sqrt{S_g^2}$, $\left[S_g\right] =$ $S_g =$

9. $g =\, < g > \pm S_g$,

$g =$

10. Для проверки соответствия зависимости $y = Ax$ экспериментальным данным применим F - критерий (критерий Фишера). Для этом вычислим следующее соотношение

$$F = \frac{S_{a\partial}^2}{S_{on}^2},$$

где $S_{on}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - < y >)^2}{n-1}$ - дисперсия опыта (или дисперсия воспроизводимости) с числом степеней свободы равным n - 1, где n - число прямых измерений величины $y_i = T_i$. Значения T_i возьмём из первого упражнения (n = 5),

а $S_{a\partial}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - Ax_i)^2}{n-1}$ - дисперсия адекватности, где n - число измерений.

$\left[S_{on}^2\right] =$; $S_{on}^2 =$

11. $\left[S_{a\partial}^2\right] =$ $S_{a\partial}^2 =$

12. $F =$

Проверим двухстороннее неравенство $\dfrac{1}{F_{табл}^{(d-1),(n-m)}} \le \dfrac{S_{a\partial}^2}{S_{on}^2} \le F_{табл}^{(n-m),(d-1)}$, где $F_{табл}^{(n-m),(d-1)} = 6.59$

$\dfrac{S_{a\partial}^2}{S_{on}^2} =$

Если окажется, что $\dfrac{S_{a\partial}^2}{S_{on}^2} \le 6.59$, то с вероятностью, равной 95 %, можно утверждать, что наше предположение о линейной зависимости между величинами $y = T^2$ и $x = l$ действительно описывается зависимостью $y = Ax$.

13. Вывод:

14. Построим график зависимости $T^2 = Al$. Здесь же нанесём звездочками экспериментальные данные (l_i, T_i^2)

Пример полного оформления лабораторной работы

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 0-1:

Обработка результатов физического эксперимента на примере определения ускорения свободного падения с помощью математического маятника.

Студент *Иванов Андрей* группа **ТМ -12**

Допуск________________________________Выполнение____________________Защита___________________

Цель работы: получение и закрепление навыков обработки результатов прямых, косвенных и совместных измерений.

Приборы и материалы: математический маятник, измерительная линейка, секундомер.

Упражнение 1. **Порядок обработки прямых измерений. Определение периода колебаний математического маятника.**

Таблица 1

$N_{изм}$	1	2	3	4	5	$\sum$
T_i, c	**1.79**	**1.84**	**1.75**	**1.82**	**1.78**	**8.98**
$T_i - \langle T \rangle$, c	**- 0.01**	**0.04**	**- 0.05**	**0.02**	**- 0.02**	**-**
$(T_i - \langle T \rangle)^2$, $\cdot 10^{-4} c^2$	**1**	**16**	**25**	**4**	**4**	**50**

$\times 10^{-4} c^2\ c^2$

1. Среднее значение периода колебаний математического маятника: $<T> = \dfrac{T_1 + T_2 + \ldots + T_5}{5}$.

$$<T> = \frac{1.79\text{ c} + 1.84\text{ c} + 1.75\text{ c} + 1.82\text{ c} + 1.78\text{ c}}{5} = 1.80c$$

2. Проведём соответствующие вычисления и заполним табл. 1.

$$\left[T_1 - \langle T \rangle\right] = c - c = c$$

$$T_1 - \langle T \rangle = 1.79c - 1.80c = -0.01c,$$

$$\left[\left(T_1 - \langle T \rangle\right)^2\right] = c^2 - c^2 = c^2$$

$$\left(T_1 - \langle T \rangle\right)^2 = (-0.01c)^2 = 0.0001c^2 = 10^{-4}c^2$$

3. найдём дисперсию среднего значение периода колебаний маятника

$$S^2_{<T>} = \frac{(T_1 - <T>)^2 + (T_2 - <T>)^2 + \ldots + (T_5 - <T>)^2}{5 \cdot 4}.$$

$$\left[S^2_{<T>}\right] = \frac{(c-c)^2 + (c-c)^2 + \ldots + (c-c)^2}{1} = c^2.$$

$$S^2_{\langle T \rangle} = \frac{50 \cdot 10^{-4}\ c^2}{20} = 2.5 \cdot 10^{-4}\ c^2$$

4. Найдём среднеквадратичное отклонение среднего значения по формуле $\boldsymbol{S_{<T>} = \sqrt{S^2_{<T>}}}$,

$$\left[S_{<T>}\right] = \sqrt{c^2} = c.$$

$$S_{\langle T \rangle} = \sqrt{S^2_{\langle T \rangle}} = \sqrt{2.5 \cdot 10^{-4}\ c^2} = 1.6 \cdot 10^{-2}\ c$$

5. Результат измерения периода колебаний запишем в виде: $T = <T> \pm t_{p,k} S_{<T>}$

где для вероятности $p = 0.95$ и числа степеней свободы $k = n - 1 = 4$, значение параметра Стьюдента $t_{p,k} = 2.8$

Ответ: $T = \left(1.80 \pm 2.8 \cdot 1.6 \cdot 10^{-2}\right)c = (1.80 \pm 0.04)c$

Вывод : На примере определения периода колебаний математического маятника я научился обрабатывать прямые измерения.

Упражнение 2. **Обработка результатов косвенных измерений. Определение ускорения свободного падения**

Таблица 2

$N_{изм}$	T_i, *с*	$S_{<T>}$, *с*	l, *м*	$S_{<l>}$, *м*	$\langle g\rangle$, $\frac{м}{с^2}$	S_g, $\frac{м}{с^2}$
1	1.79	$1.6\cdot10^{-2}$	0.80	0.025	10.25	0.13
2	1.84					
3	1.75					
4	1.82					
5	1.78					
$\sum$	8.98					

1. По формуле $<g>=\dfrac{4\pi^2 l}{<T^2>}$ вычислим среднее значение ускорения.

Проверим размерность: $[<g>]=\dfrac{м}{с^2}=\dfrac{м}{с^2}$. Подставим значения: $\langle g\rangle=\dfrac{4\cdot3{,}14^2\cdot0{,}80\,м}{(1{,}80\,с)^2}=9{,}74\dfrac{м}{с^2}$

2. Вычислим дисперсию ускорения свободного падения по формуле:

$$S_g^2=\left(\frac{4\pi^2}{\langle T\rangle^2}\right)^2 S_l^2+\left(\frac{-8\pi^2 l}{\langle T\rangle^3}\right)^2 S_T^2+\left(\frac{8\pi\, l}{\langle T\rangle^2}\right)^2 S_\pi^2;$$

Проверим размерность: $\left[S_g^2\right]=\left(\dfrac{1}{с^2}\right)^2 м^2+\left(\dfrac{м}{с^3}\right)^2 с^2+\left(\dfrac{м}{с^2}\right)^2 1=\dfrac{1}{с^4}м^2+\dfrac{м^2с^2}{с^6}+\dfrac{м^2}{с^4}=\dfrac{м^2}{с^4}+\dfrac{м^2}{с^4}+\dfrac{м^2}{с^4}=\dfrac{м^2}{с^4}$.

В качестве погрешности в определении длины нити математического маятника S_l возьмём квадрат приборной погрешности ***(в качестве приборной погрешности принимается величина, равная половине цены деления шкалы прибора).***

$$s_l = 0.025 \text{ м}$$

В качестве погрешности числа π S_π возьмите табличную погрешность ***(в качестве табличной погрешности принимается величина, равная половине единицы последнего разряда округлённой табличной величины).***

$$s_\pi = 0.005$$

Величину S_T^2 рассчитаем по формуле $S_T^2=\dfrac{\sum\left(T_i-\langle T\rangle\right)^2}{n-1}$, где n – число измерений.

Проверим размерность: $\left[S_T^2\right]=\dfrac{\sum\left(\,с-с\right)^2}{1}=с^2$; $\quad S_{\langle T\rangle}^2=\dfrac{50\cdot10^{-4}\,с^2}{4}=12.5\cdot10^{-4}\,с^2$.

$$S_g^2=\left(\frac{4\cdot3{,}14^2}{(1{,}80\,с)^2}\right)^2\cdot(0{,}025\,м)^2+\left(-\frac{8\cdot3{,}14^2\cdot0{,}80\,м}{(1{,}80\,с)^3}\right)^2\cdot12.5\cdot10^{-4}\,с^2+\left(\frac{8\cdot3{,}14\cdot0{,}80\,м}{(1{,}80\,с)^2}\right)^2\cdot(0.005)^2\;,\quad\Rightarrow$$

$$S_g^2=926.06\cdot10^{-4}\frac{м^2}{с^4}+1463.38\cdot10^{-4}\frac{м^2}{с^4}+9.62\cdot10^{-4}\frac{м^2}{с^4}=3351.21\cdot10^{-4}\frac{м^2}{с^4}=0.34\frac{м^2}{с^4}\,,\quad\Rightarrow\quad S_g^2=0.34\frac{м^2}{с^4}$$

3. Найдём среднеквадратичное отклонение ускорения: $S_g=\sqrt{S_g^2}$. $\quad S_g=\sqrt{0.34\dfrac{м^2}{с^4}}=0{,}58\dfrac{м}{с^2}$

4. Результат измерения ускорения запишем в виде: $g=<g>\pm S_g$; $\quad g=(9.74\pm0{,}58)\dfrac{м}{с^2}$

Вывод: Из сравнения значения ускорения свободного падения, полученного в результате проведённого эксперимента с теоретическим значением: $g_{практика}=(9.74\pm0{,}58)\dfrac{м}{с^2}$, $\quad g_{теория}=(9.81\pm0{,}05)\dfrac{м}{с^2}$, видно, что их значения незначительно отличаются. Относительная погрешность нашего эксперимента составляет

$$\varepsilon=\frac{\left|g_{практика}-g_{теория}\right|}{g_{теория}}\cdot100\,\%=\frac{\left|9.74\frac{м}{с^2}-9.81\frac{м}{с^2}\right|}{9.81\frac{м}{с^2}}\cdot100\,\%=0{,}71\%\,.$$

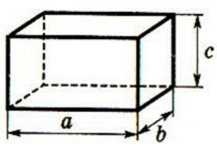
По моему мнению, это связано в основном со случайными погрешностями измерений, возникающими во время эксперимента. (**упражнение №3 сделать по аналогии самостоятельно**)

Таблица производных

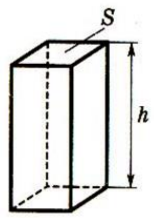
Функция	*Производная*	*Функция*	*Производная*
x^n	$n\,x^{n-1}$	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$tg\,x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
e^{nx}	$n\,e^{nx}$	$ctg\,x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{vu'-uv'}{v^2}$	$arctg\,x$	$\frac{1}{1+x^2}$

ПРИСТАВКИ И МНОЖИТЕЛИ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ ДЕСЯТИЧНЫХ И ДОЛЬНЫХ ЕДИНИЦ

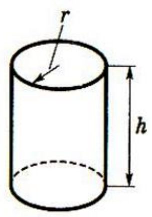
Приставка	Символ		Множитель	Приставка	Символ		Множитель
	Международный	Русский			Международный	Русский	
экса	E	Э	10^{18}	деци	d	д	10^{-1}
пета	P	П	10^{15}	санти	c	с	10^{-2}
тера	T	Т	10^{12}	милли	m	м	10^{-3}
гига	G	Г	10^{9}	микро	μ	мк	10^{-6}
мега	M	М	10^{6}	нано	n	н	10^{-9}
кило	k	к	10^{3}	пико	p	п	10^{-12}
гекто	h	г	10^{2}	фемто	f	ф	10^{-15}
дека	da	да	10	атто	a	а	10^{-18}



$V = abc$



$V = Sh$



$V = \pi r^2 h$

Объём шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Площадь поверхности шара: $S = 4\pi R^2$

Длина окружности: $l = 2\pi R$

Площадь круга: $S = \pi R^2$

Таблица синусов и косинусов

α	0	30	45	60	90
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin α	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$