ТЕМА 6: Механика абсолютно твёрдого тела

Абсолютно твёрдым телом называется тело, деформациями которого в условии данной задачи можно пренебречь.

Моментом силы $\vec{M}$ относительно неподвижной точки О называется векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки О в точку приложения силы $\vec{F}$, на саму эту силу:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right],$$ где $\left[M\right] = H \cdot м$, Ньютон · метр.

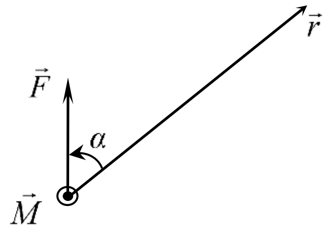


рис. 1

Направление вектора момента силы $\vec{M}$ определяется ***по правилу векторного произведения (или правилу буравчика):***

если соединить начала векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$, установить буравчик перпендикулярно этим векторам и вращать рукоятку буравчика от первого сомножителя в векторном произведении $\vec{r}$ ко второму $\vec{F}$ по кратчайшему повороту, то поступательное движение буравчика покажет направление искомого вектора $\vec{M}$ (см. рис. 1)

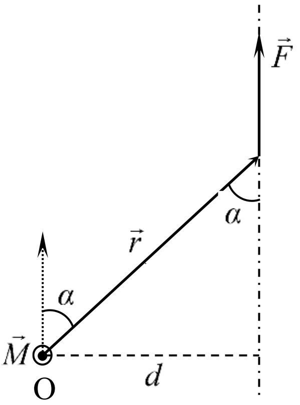


рис. 2

Можно использовать более простое ***правило буравчика***:

если рукоятку буравчика вращать по направлению действия силы $\vec{F}$, то поступательное движение буравчика будет совпадать с направлением вектора момента силы $\vec{M}$ (см. рис. 5).

На рис. 4 и 5 вектор $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа на нас.

При этом следует помнить, что начало вектора $\vec{M}$ совпадает с точкой О,

сам вектор перпендикулярен одновременно векторам $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а его величину можно определить по формуле: $M = rF\sin\alpha$ или $M = Fd$,

где α - угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а величина $d = r\sin\alpha$ называется *плечом силы* $\vec{F}$, $\left[d\right] = м$, метр.

Плечом силы d называется кратчайшее расстояние от точки О до линии действия силы $\vec{F}$ (см. рис. 2).

Величина вектора $\vec{M}$ зависит от выбора точки О.

Моментом силы M_Z относительно неподвижной оси вращения Z называется скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента силы $\vec{M}$ относительно любой точки О, выбранной на этой оси:

$$M_Z = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right]_Z.$$

Величина M_Z не зависит от выбора точки О на этой оси Z.

Наблюдения показывают, что при рассмотрении вращательного движения тела, основной характеристикой инертных свойств тела является не масса этого тела m, а величина, называемая **моментом инерции тела** I (и).

Моментом инерции тела относительно оси вращения Z называется скалярная величина, равная

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,$$

где r_i - кратчайшее расстояние от оси Z до элементарной массы тела m_i.

Основной особенностью момента инерции тела является то обстоятельство, что его величина зависит от выбора оси вращения тела и распределение массы тела относительно рассматриваемой оси.

То есть в отличие от массы m, одно и то же тело имеет бесконечное множество моментов инерции I в зависимости от выбора оси вращения. В общем случае момент инерции тела относительно произвольной оси можно рассчитать по формуле: $$I = \int_V r^2 \rho dV,$$ где $\left[I\right] = кг \cdot м^2$ (килограмм - метр квадратный).

ρ - это функция распределения плотности тела по его объёму.

Условия равновесия твёрдого тела при плоской системе сил

Для того чтобы тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, находилось в состоянии равновесия или вращалось с постоянной угловой скоростью, необходимо выполнение одновременно двух условий.

Первое условие равновесия тела в инерциальной системе отсчёта:

векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю, то есть $\sum \vec{F}_i = 0$.

В этом случае равно нулю ускорение центра масс тела. Всегда можно найти такую систему отсчета, в которой центр масс тела покоится.

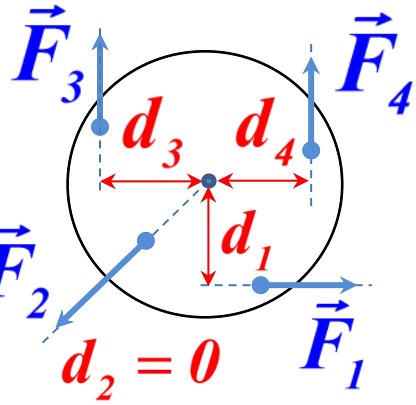
Однако это условие не означает, что все точки тела должны покоятся. Они могут принимать участие во вращательном движении вокруг центра масс. Поэтому возникает ещё одно условие.

Второе условие равновесия тела в инерциальной системе отсчёта (правило моментов):

алгебраическая сумма моментов всех внешних сил, действующих на тело, относительно любой неподвижной оси вращения Z должна быть равна нулю, то есть $\sum M_i = 0$.

Следует учитывать правило знаков для моментов сил:

- если сила пытается повернуть тело вокруг выбранной оси Z по часовой стрелке, то момент такой силы имеет знак минус « + »;
- если сила пытается повернуть тело вокруг выбранной оси Z против часовой стрелки, то момент такой силы имеет знак плюс « - ».



Или другая формулировка **правила моментов**:

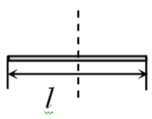
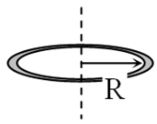
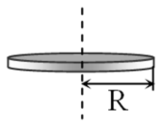
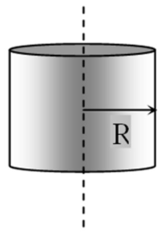
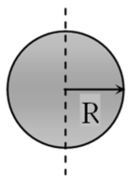
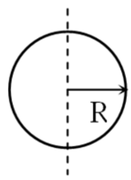
тело находится в равновесии относительно неподвижной оси вращения Z, если сумма моментов сил, пытающихся повернуть тело по часовой стрелке, равна сумме моментов сил, пытающихся повернуть его против часовой стрелки:

$$\left(\sum M_i\right)_{по} = \left(\sum M_k\right)_{против}.$$

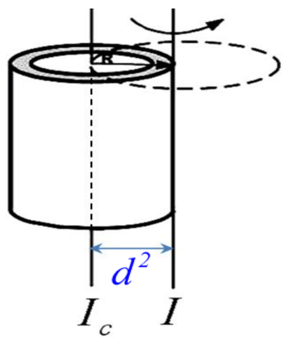
Собственный момент инерции тела

Собственным моментом инерции тела *называется момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела.*

Собственные моменты инерции некоторых однородных тел массой *m*

однородный тонкий стержень длиной l	однородный тонкий обруч радиусом R	однородный тонкий диск радиусом R	однородный сплошной цилиндр радиусом R	однородный шар радиусом R	однородная сфера радиусом R
					
$I = \frac{ml^2}{12}$	$I = mR^2$	$I = \frac{mR^2}{2}$	$I = \frac{mR^2}{2}$	$I = \frac{2}{5}mR^2$	$I = \frac{2}{3}mR^2$

Если необходимо найти момент инерции тела относительно произвольной оси, не проходящей через центр масс тела, то применяют *теорему Штейнера*.



Теорема Штейнера

Момент инерции твёрдого тела I *относительно произвольной оси, не проходящей через центр масс тела, равен сумме момента инерции этого тела* I_c *относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной данной, и произведения массы этого тела* m *на квадрат расстояния между этими осями* d^2:

$$I = I_c + md^2.$$

Основное уравнение динамики вращательного движения тела относительно неподвижной оси вращения Z:

В инерциальной системе отчёта алгебраическая сумма моментов всех внешних сил $\sum M_{Z_i}$, *действующих на тело относительно неподвижной оси вращения Z, равна произведению момента инерции этого тела относительно этой оси* I_Z, *на сообщённое ему угловое ускорение* ε:

$$\sum M_{Z_i} = I_Z \varepsilon.$$