Тема: Уравнения Максвелла

В 60-х годах 19 века Максвелл обобщив известные к тому времени законы электростатики и магнетизма разработал законченную теорию ***единого электромагнитного поля***.
Она решает основную задачу электродинамики:
зная распределение токов и электрических зарядов в пространстве, можно определить характеристики создаваемого ими электромагнитного поля.
Прежде чем записать свои уравнения Максвелл ввёл понятие **тока смещения** и рассмотрел его свойства.
Рассмотрим, что такое ток смещения?

Ток смещения

Рассмотрим конденсатор в цепи постоянного и переменного тока. Наблюдения показывают, что:
1. - постоянный ток конденсатор не пропускает (то есть ток в цепи отсутствует),
   - переменный ток конденсатор пропускает (то есть ток в цепи существует).
2. Во время перезарядки конденсатора одинаковое по величине магнитное поле существует не только вокруг подводящих ток проводов, но и вокруг конденсатора, где тока проводимости нет.

Что является источником этого поля? Максвелл предложил следующее объяснение:
если между обкладками конденсатора находится диэлектрик, то при перезарядки конденсатора под действием электрического поля происходит смещение связанных с атомом электрических зарядов (электронов), которое можно рассматривать как своеобразный электрический ток, который Максвелл назвал ***током смещения***.
Математические вычисления показывают, что плотность тока смещения можно определить по формуле
$$\vec{j}_{смещ} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$
где $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ - вектор электрического смещения,
а $\vec{P}$ - вектор поляризованности диэлектрика.
Таким образом, ***плотность тока смещения*** – это частная производная вектора электрического смещения по времени.
(то есть, в любой точке пространства, где изменяется электрическое поле, существует ток смещения, который создаёт вокруг себя магнитное поле)
Рассмотрим подробнее ток смещения, для чего найдём производную $\vec{D}$ по времени:
$$\vec{j}_{смещ} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right)}{\partial t} = \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \qquad (1)$$
Из (1) следует, что ток смещения, текущий через конденсатор, состоит из двух слагаемых:
1. $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ - называется **плотностью тока поляризации** (связано со смещением зарядов в атомах диэлектрика)
2. $\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ - называется **плотностью тока смещения в вакууме** (не связано со смещением зарядов в атомах диэлектрика, а обусловлено изменением электрического поля внутри диэлектрика)

Из анализа уравнения (1) следует важнейший вывод о том, что ***ток смещения могут создавать не только движущиеся связанные заряды в диэлектрике, но и изменяющееся со временем электрическое поле.***
(то есть, если взять конденсатор без диэлектрика (тогда $\vec{P} = 0$ и, следовательно, $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = 0$), то через конденсатор всё равно будет протекать ток смещения и в цепи, как и прежде, будет существовать ток и магнитное поле вокруг конденсатора.) Наблюдения подтверждают этот вывод.
Током смещения называют величину, равную потоку вектора плотности тока смещения через произвольную поверхность *S*, то есть $I_{смещ} = \int\limits_S \vec{j}_{смещ} d\vec{S} = \int\limits_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$.

Ток смещения в вакууме

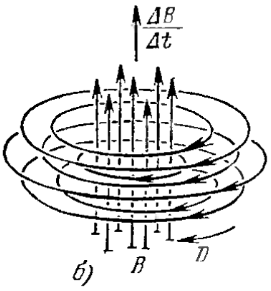
По своей физической природе ***ток смещения в вакууме*** – это изменяющееся со временем переменное электрическое поле. Током его назвали потому, что:

1. как и ток проводимости изменяющееся во времени электрическое поле создаёт вокруг себя магнитное поле,
2. имеет размерность тока.

Уравнения Максвелла

Уравнения Максвелла играют в электродинамике покоящихся сред такую же роль, как и три закона Ньютона в механике или три начала в термодинамике.
Различают уравнения Максвелла в интегральной и дифференциальной формах.

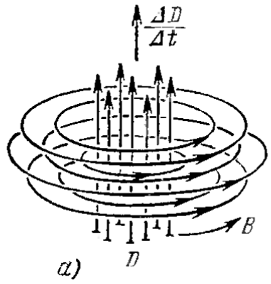
Уравнения Максвелла в интегральной форме (или полевые уравнения Максвелла)



1. ***Циркуляция вектора*** $\vec{E}$ ***вдоль произвольного замкнутого контура L равна потоку вектора*** $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ***через поверхность S, охватывающую этот контур, взятому с противоположным знаком, то есть***

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

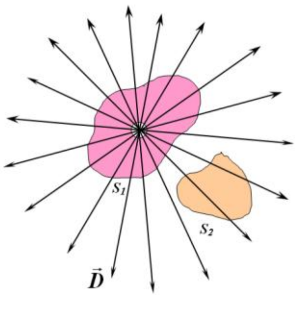
физический смысл: переменное магнитное поле порождает вокруг себя вихревое электрическое поле.



2. ***Циркуляция вектора*** $\vec{H}$ ***вдоль произвольного замкнутого контура L равна потоку вектора*** $\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ***через поверхность S, охватывающую этот контур, то есть***

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

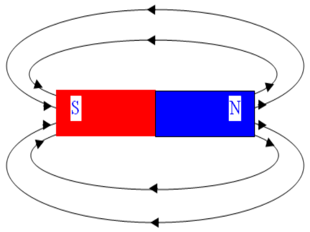
физический смысл: магнитное поле создаётся не только токами проводимости, но и изменяющимся во времени электрическим полем.



3. ***Поток вектора*** $\vec{D}$ ***через произвольную замкнутую поверхность S, равен алгебраической сумме свободных электрических зарядов, находящихся внутри этой поверхности, то есть***

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = \int_V \rho \, dV$$

физический смысл: оно показывает, что источником электростатического поля являются свободные электрические заряды.



4. ***Поток вектора*** $\vec{B}$ ***через произвольную замкнутую поверхность S, равен нулю, то есть***

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$$

физический смысл: оно показывает, что в природе не существует магнитных зарядов.

Это фундаментальные уравнения теории электромагнитного поля.
Из анализа 1- го и 2-го законов Максвелла следует, что переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое, а переменное электрическое поле порождает магнитное, то есть переменные электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом и являются просто проявлениями единого электромагнитного поля.

Из четырёх уравнений Максвелла два векторных и два скалярных. Так как каждое векторное уравнение эквивалентно трём скалярным, то всего получается 3+3+2 = 8 уравнений с 12 –тью неизвестными. Поэтому, чтобы систему уравнений можно было решить, её дополняют, так называемыми, **материальными уравнениями**, которые учитывают свойства окружающей токи и заряды среды. В случае однородной несегнетоэлектрической и неферромагнитной среды материальные уравнения имеют вид: $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, $\vec{j} = \sigma\vec{E}$.

В этих уравнениях:

- поляризованность среды учитывает величина ε,
- намагниченность среды величина μ,
- проводящие свойства среды величина σ.

Чтобы система уравнений Максвелла имела единственное решение, к ним необходимо ещё добавить начальные условия и условия на границе раздела сред (граничные условия):

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma, \qquad E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0$$

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = j_N^{поверх}, \qquad B_{2n} - B_{1n} = 0,$$

где σ - поверхностная плотность свободных зарядов в рассматриваемой точке М,

$\vec{n}$ - единичный вектор нормали в точке М, проведённый из среды 1 в 2,

$\vec{\tau}$ - единичный вектор касательной к поверхности раздела в точке М,

$\vec{j}_N^{пов}$ - вектор поверхностной плотности тока проводимости в точке М.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме можно получить из интегральных уравнений с помощью двух теорем векторного анализа:

1. Теоремы Гаусса : ***Поток вектора $\vec{A}$ через произвольную замкнутую поверхность S, равен дивергенции этого вектора $div\,\vec{A}$ по объёму этой поверхности:***

$$\oint_S \vec{A}d\vec{S} = \int_V div\,\vec{A}\,dV,$$

где $div\,\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ - **дивергенция вектора** $\vec{A}$ (то есть сумма частных производных соответствующих компонент вектора $\vec{A}$ по координатам).

Смысл этой теоремы в том, что поток любого произвольного вектора $\vec{A}$ можно при необходимости заменить интегралом по объёму дивергенции этого вектора.

2. Теоремы Стокса: ***Циркуляция вектора $\vec{A}$ вдоль произвольного замкнутого контура L равна потоку ротора вектора $\vec{A}$ через поверхность S, охватывающую этот контур:***

$$\oint_L \vec{A}d\vec{l} = \oint_S rot\vec{A}d\vec{S},$$

где $rot\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$ - **ротор вектора** $\vec{A}$ (то есть определитель второго порядка частных производных соответствующих компонент вектора $\vec{A}$ по координатам).

Смысл этой теоремы в том, что циркуляцию любого произвольного вектора $\vec{A}$ можно при необходимости заменить потоком ротора этого вектора.

Дивергенция вектора $\vec{A}$ $div\,\vec{A}$ и ротор вектора $\vec{A}$ $rot\,\vec{A}$ - это математические операторы.

Так вот, после некоторых математических преобразований уравнений Максвелла в интегральной форме можно получить следующие уравнения Максвелла в дифференциальной форме:

1. $rot\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
2. $rot\,\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
3. $div\,\vec{D} = \rho$
4. $div\,\vec{B} = 0$

Теория Максвелла объяснила все известные в то время экспериментальные факты и предсказала ряд новых явлений. Основным следствием теории Максвелла был вывод о существовании электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света, а теоретическое исследование свойств этих волн привело Максвелла к созданию ***электромагнитной теории света***.

Надо сказать, что никто этих волн до Максвелла не видел, никто даже не подозревал, что такие волны могут существовать. Но лишь через двадцать лет после того, как это предсказание было сделано, их наконец-то экспериментально обнаружили, что явилось настоящим триумфом этой теории.