

Разбор задачи на закон сохранения момента импульса механической системы

Пример 7. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается вокруг вертикальной оси. Частота вращения скамьи с человеком в начальный момент равна $n_1 = 0,5 \text{ с}^{-1}$. Момент инерции I_0 тела человека относительно оси вращения равен $1,6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. В вытянутых в стороны руках человек держит по гири массой $m = 2 \text{ кг}$ каждая. Расстояние между гирями $l_1 = 1,6 \text{ м}$. Определите частоту вращения n_2 скамьи с человеком, когда он опустит руки и расстояние l_2 между гирями станет равным $0,4 \text{ м}$. Силами трения в оси скамьи и сопротивлением воздуха пренебречь. Моментом инерции скамьи равен $2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Размерами гирь можно пренебречь.

Ответ: $n_2 = 0,8 \text{ с}^{-1}$

Дано:

$$n_1 = 0,5 \text{ с}^{-1}$$

$$I_0 = 1,6 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$$

$$I_0 = 2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$$

$$l_1 = 1,6 \text{ м}$$

$$l_2 = 0,4 \text{ м}$$

$$F_{\text{тр}} = 0 \text{ Н}$$

$$n_2 = ?$$

Решение

Рассмотрим механическую систему «Человек + скамья».

Так как наша система участвует во вращательном движении, то для неё должен выполняться или закон изменения момента импульса или закон сохранения момента импульса.

Проанализируем возможность применения для нашей системы закона сохранения момента импульса относительно неподвижной оси вращения Z :

В инерциальной системе отсчёта момент импульса механической системы L_Z относительно неподвижной оси вращения Z не изменяется ни по величине, ни по направлению, если проекции моментов всех внешних сил, действующих на тела механической системы относительно неподвижной оси вращения Z , равны нулю.

Рассмотрим все силы, действующие на тела нашей системы:

- сила реакции опоры \vec{N}_I , действующая на человека со стороны скамьи и вес человека \vec{P} , действующий на скамью являются внутренними силами, поэтому их мы не рассматриваем;
- на нашу систему действуют следующие внешние силы: сила тяжести, действующая на человека и скамью $(M+m)\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} , действующая на скамью,
- силы трения и сопротивления по условию задачи отсутствуют.

Так как все действующие на систему внешние силы направлены вдоль оси вращения, то их моменты относительно этой оси равны нулю. Поэтому для нашей рассматриваемой механической системы, будет выполняться закон сохранения момента импульса относительно неподвижной оси вращения Z .

Запишем этот закон относительно вертикальной оси вращения Z для начального и конечного моментов времени:

$$(I_0 + I_{01} + I_{02} + I)\omega_1 = (I_0 + I_1 + I_2 + I)\omega_2,$$

где I_0 - момент инерции тела человека относительно оси вращения (он в условиях нашей задачи не изменяется),

I - момент инерции скамьи относительно оси вращения (он в условиях нашей задачи так же не изменяется)

I_{01} и I_1 - начальный и конечный момент инерции первой гири относительно оси вращения,

I_{02} и I_2 - начальный и конечный момент инерции второй гири относительно оси вращения.

Так как гири можно рассматривать как материальные точки, то для них момент инерции можно определить по формуле момента инерции материальной точки: $I = mr^2$, где r - расстояние гири от оси вращения. Для нашего случая можно

записать, что $I_{01} = I_{02} = m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2$ и $I_1 = I_2 = m\left(\frac{l_2}{2}\right)^2$, где m — масса каждой из гирь, l_1 и l_2 — начальное и конечное

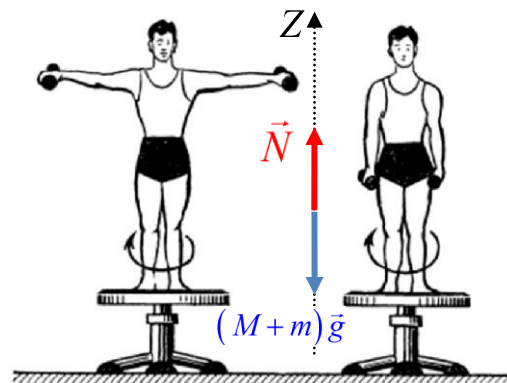
расстояние между гирями.

Таким образом,

$$\left(I_0 + 2m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + I \right) 2\pi n_1 = \left(I_0 + 2m\left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + I \right) 2\pi n_2.$$

Отсюда получим:

$$n_2 = \frac{\left(I_0 + 2m\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + I \right) 2\pi n_1}{2\pi \left(I_0 + 2m\left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + I \right)} \quad (1)$$



Размерность уравнения (1) очевидна. В скобках уравнения размерность момента инерции тела, которые сокращаются, и остаётся размерность частоты вращения.

Подставим исходные данные:

$$n_2 = \frac{\left(1,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 + 2 \cdot 2 \text{ кг} \cdot \left(\frac{1,6 \text{ м}}{2}\right)^2 + 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2\right) 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \text{ с}^{-1}}{2 \cdot 3,14 \cdot \left(1,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 + 2 \cdot 2 \text{ кг} \cdot \left(\frac{0,4 \text{ м}}{2}\right)^2 + 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2\right)} = 0,8 \text{ с}^{-1}$$

Ответ: $n_2 = 0,8 \text{ с}^{-1}$.