Тема: Механические и электромагнитные колебания

Колебаниями *называются движения или процессы, характеризующиеся определенной повторяемостью во времени.*

Механическими колебаниями называются механические движения тела, повторяющиеся с течением времени.

(например, колебания маятника, биение сердца и т.п.)

Электромагнитными колебаниями называются повторяющиеся со временем изменения элекртического и магнитного полей, происходящие в колебательном контуре.

Условия необходимые для возникновения колебаний в системе

1. Наличие в системе положения устойчивого равновесия.
2. Возникновение результирующей силы, направленной к положению устойчивого равновесия, при отклонении системы из положения равновесия, величина которой прямо пропорциональна отклонению системы.
3. Силы трения и сопротивления в системе должны быть малы.

Маятники

Маятником называется твёрдое тело, совершающее механические колебания около неподвижной оси.

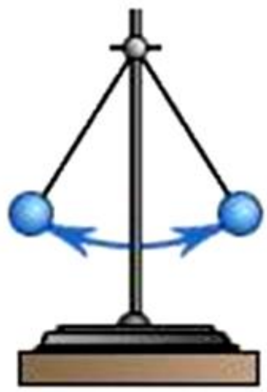
Периодом колебаний T (тэ) называется время одного полного колебания (то есть это время, через которое система возвращается в исходное состояние).

$\left[T\right]=c$, секунда.

Если сил трения и сопротивления в системе нет, то период колебаний T можно определить по следующим формулам.

Математический маятник

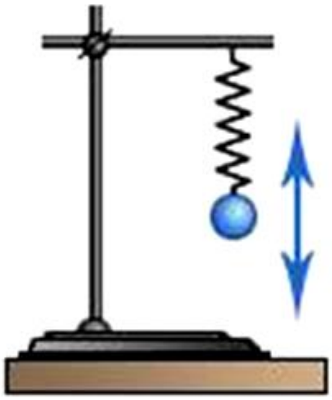
Математическим маятником называется идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити, совершающей колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести.



$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ - период колебаний математического маятника,

где l - длина нити маятника, $м$; g - ускорение свободного падения, $\frac{м}{c^2}$.

Пружинный маятник



Пружинным маятником называется система, состоящая из грузика массой m, прикреплённого к абсолютно упругой невесомой пружине, совершающего колебания под действием упругой силы вида $F = -kx$,

где k - коэффициент жёсткости пружины, $[k] = \frac{Н}{м}$;

x - величина деформации пружины, $м$.

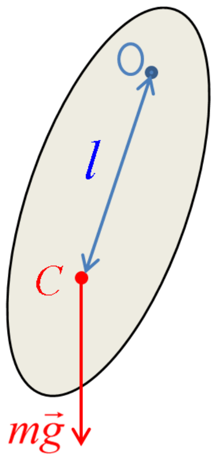
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ - период колебаний пружинного маятника,

где

k - коэффициент жёсткости пружины, $\frac{Н}{м}$;

m - масса грузика, $кг$.

Физический маятник



Физическим маятником называется твёрдое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания в вертикальной плоскости вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$ - период колебаний физического маятника,

где

l - расстояние от центра масс маятника С до оси качания О, $м$;

I - момент инерции маятника относительно оси качания О, $кг \cdot м^2$;

g - ускорение свободного падения, $\frac{м}{с^2}$; m - масса маятника, $кг$.

Оборотный маятник

Оборотным маятником называется массивное твёрдое тело с двумя перемещающимися вдоль оси маятника трехгранными ножами, способное совершать колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести вокруг каждого из ножей.
(*Оборотный маятник используется для экспериментального определения ускорения свободного падения* g).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$ - период колебаний оборотного маятника,

где
L - приведённая длина оборотного маятника (она равна расстоянию между ножами оборотного маятника, когда период колебаний маятника на каждом из ножей одинаков), $м$.

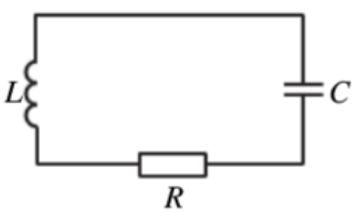
g - ускорение свободного падения, $\frac{м}{с^2}$.

Колебательный контур

Колебательным контуром называется электрическая цепь, состоящая из конденсатора ёмкостью С, катушки индуктивностью L и резистора сопротивлением R.

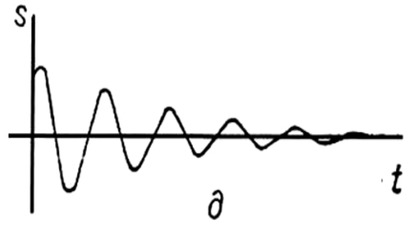
Различают *реальный* и *идеальный* колебательные контура.

Реальный колебательный контур

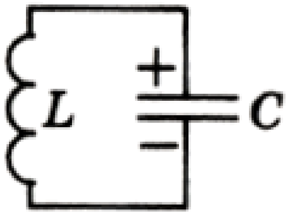


- электрическая схема реального колебательного контура.

Реальный колебательный контур обладает активным сопротивлением ($R \neq 0$), на котором происходит тепловые потери при прохождении по нему тока, в результате чего в реальном колебательном контуре происходят затухающие электромагнитные колебания.

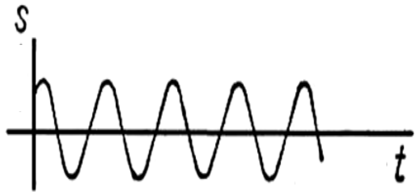


Идеальный колебательный контур



- электрическая схема идеального колебательного контура.

В идеальном колебательном контуре нет активного сопротивления $(R = 0)$. Из-за отсутствия тепловых потерь на этом сопротивлении, в идеальном колебательном контуре происходят незатухающие электромагнитные колебания.



Электромагнитные колебания происходят в результате периодической перезарядки конденсатора и возникновения ЭДС электромагнитной индукции в катушке индуктивности.

В колебательном контуре совершают колебания:

1. энергия электрического поля конденсатора $W_{ЭП}$ и энергия магнитного поля катушки $W_{МП}$,
2. заряд q и напряжение u на конденсаторе,
3. сила тока i в цепи.

Период электромагнитных колебаний

Периодом колебания T называется наименьший промежуток времени, через который колебания в точности повторяются.

$[T] = c$, секунда.

Линейной частотой колебаний ν (ню) (или просто ***частотой колебаний***) называется величина обратная периоду колебаний, то есть $\nu = \frac{1}{T}$;

$[\nu] = \frac{1}{c} \equiv Гц$, Герц.

- ***Условный период электромагнитных колебаний*** T *в реальном колебательном контуре* можно определить по формуле:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC}\right)^2-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}},$$

где R - активное сопротивление контура, *Ом*,
L (эль) - индуктивность контура (это индуктивность катушки), *Гн*, Генри;
C (цэ) - ёмкость контура (электрическая ёмкость конденсатора), *Ф*, Фарад;
ω (омега) - циклическая частота затухающих колебаний;
ω_0 - собственная циклическая частота (частота незатухающих колебаний), *рад*;
β (бэта) - коэффициент затухания, $\frac{1}{c}$.

- ***Период электромагнитных колебаний*** T *в идеальном колебательном контуре* можно определить по формуле *Томсона*:

$$T=2\pi\sqrt{LC}.$$

где
L (эль) - индуктивность контура (это индуктивность катушки), *Гн*, Генри;
C (цэ) – ёмкость контура (электрическая ёмкость конденсатора), *Ф*, Фарад;

Причём,
$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}=2\pi\nu.$$

Гармонические колебания и их характеристики

Гармоническими называются колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса:

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

или

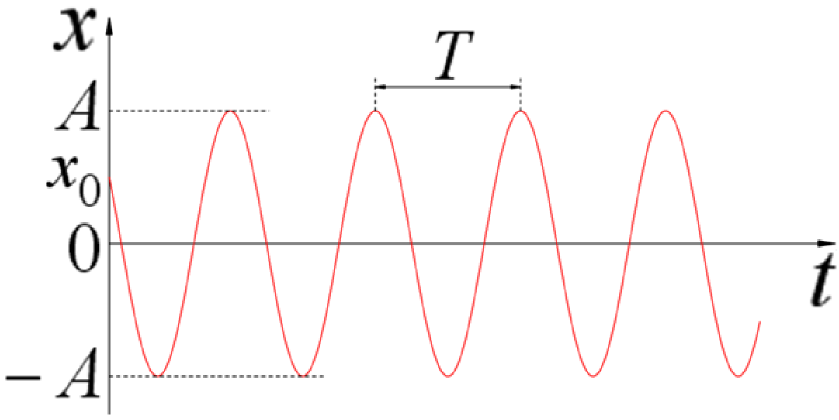
$$x=A\sin(\omega_0 t+\alpha),$$

где
x (икс) - колеблющаяся величина (например, смещение маятника, заряд или напряжение на конденсаторе, сила тока в цепи и т.п.),
A (а) - амплитуда колебания (то есть максимальное отклонение колеблющейся величины от положения равновесия),
ω_0 (омега нулевое) - круговая или циклическая частота колебаний, $\frac{рад}{c}$;

φ (фи) (или α (альфа)) - начальная фаза колебания, $рад$, радиан,
(это фаза колебания в начальный момент времени $t = 0$ с, она определяет значение колеблющейся величины в момент времени $t = 0$ с),

$\Phi = (\omega_0 t + \varphi)$ - фаза колебаний в произвольный момент времени t, $рад$;
(фаза колебания определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени t).

График гармонических колебаний



По графику гармонических колебаний можно определить период колебаний T (см. рис), а, следовательно, линейную частоту колебаний $\nu = \dfrac{1}{T}$ и циклическую частоту $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Так же можно определить амплитуду колебаний A (см. рис) и начальную фазу φ. Для этого из рис. для момента времени $t = 0\,c$ определяем x_0.
В этом случае уравнение гармонических колебаний будет иметь вид

$$x_0 = A\cos\varphi.$$

Следовательно, $\cos\varphi = \dfrac{x_0}{A}$ или $\varphi = \arccos\dfrac{x_0}{A}$.

Дифференциальное уравнение свободных колебаний и его решение

Свободными (или ***собственными***) называются колебания, возникающие в системе под действием внутренних сил после того, как система была выведена из положения устойчивого равновесия, и происходящие за счёт сообщённой системе энергии, которая в дальнейшем не пополняется.
(например: колебания маятника)

Незатухающими называются колебания, амплитуда которых не изменяется с течением времени.

Затухающие колебания называются колебания, амплитуда которых уменьшается с течением времени.

Периодическими называются колебания, которые в точности повторяются через определённый промежуток времени, называемый периодом колебаний T.

Дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0, \qquad (1)$$

где x - колеблющаяся величина (например, смещение тела от положения равновесия x, заряд q или напряжение u на конденсаторе, сила тока i в колебательном контуре и т.п.);

$\frac{d^2x}{dt^2}$ - вторая производная колеблющейся величины x по времени;

ω_0 - собственная циклическая частота колебаний, $\frac{рад}{c}$.

Решение уравнения (1) имеет вид:

$$x=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$$

или

$$x=A\sin(\omega_0 t+\alpha),$$

То есть, дифференциальное уравнение (1) описывает гармонические колебания.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0 \qquad (2)$$

где x (икс) - колеблющаяся величина, описывающая тот или иной физический процесс;

β (бэта) - коэффициент затухания, $\frac{1}{c}$;

ω_0 (омега нулевое) - собственная циклическая частотой колебательной системы, $\frac{рад}{c}$

Если в системе есть силы трения и сопротивления, такие, что выполняется условие $\beta^2\geq\omega_0^2$, то колебания в системе очень быстро затухают.

Если же в системе силы трения и сопротивления малы, такие, что выполняется условие $\beta^2<<\omega_0^2$, то в системе происходят слабо затухающие колебания, и решение уравнения (2) имеет вид:

$$x=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi) \qquad (3)$$

где $A=A_0e^{-\beta t}$ - амплитуда затухающих колебаний,

A_0 - начальная амплитуда (амплитуда колебаний в момент времени $t=0c$).

Условным периодом T затухающих колебаний называется величина, равная $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение

Вынужденными называются колебания, происходящие под влиянием изменяющихся со временем внешних периодических воздействий.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f\cos\Omega t, \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) равно сумме общего решения (3) однородного уравнения (2) и частного решения неоднородного уравнения:

$$x=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)+A(\Omega)\cos(\Omega t+\alpha), \qquad (5)$$

где Ω (омега) - частота вынуждающих возмущений, $Гц$.

Амплитуду вынужденных колебаний можно определить по формуле

$$A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \qquad (6)$$

а начальную фазу вынужденных колебаний - по формуле

$$\alpha = arctg\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \qquad (7)$$

Явление резонанса

Из анализа уравнения (7) следует, что вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания зависит от частоты вынужденных возмущений Ω.

А из анализа уравнения (6) следует, что амплитуда вынужденных колебаний $A(\Omega)$ так же зависит от частоты вынужденных возмущений Ω. Причём, амплитуда колебаний будет достигать своего максимального значения при, так называемой, резонансной частоте $\Omega_{рез}$, которую можно определить по формуле:

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \qquad (8)$$

Резонансом называется явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний $A(\Omega)$ при приближении частоты вынуждающих возмущений Ω к величине резонансной частоты $\Omega_{рез}$.

Резонансные кривые

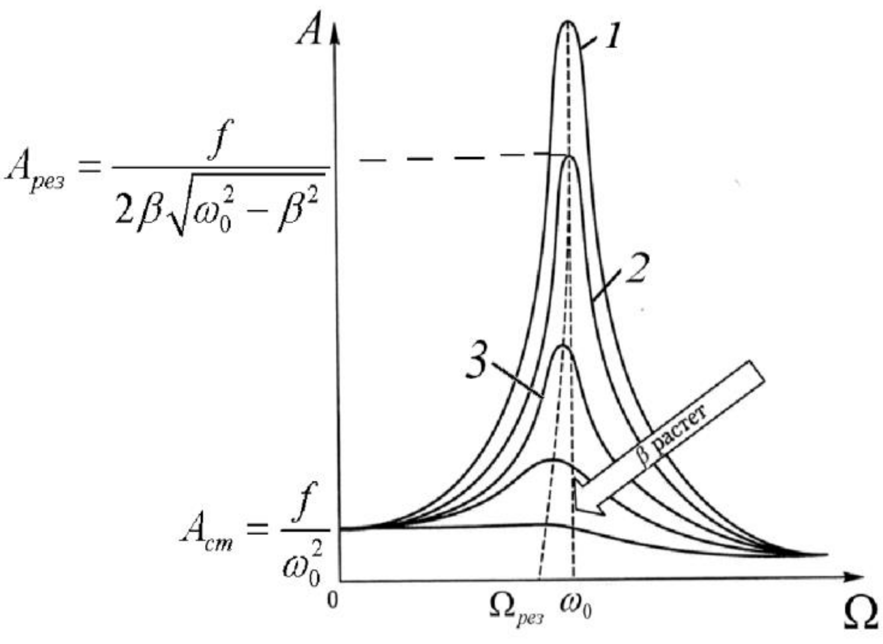


Рис. 2

На рис. 2 приведены зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающих возмущений Ω при различных значениях коэффициента затухания системы β. (эта совокупность кривых называется ***резонансными кривыми***).

На этом рисунке:

- **кривые 1, 2, 3** – это резонансные кривые при коэффициентах затухания

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3.$$

Из рис. 2 видно, что

- чем меньше коэффициент затухания β, тем выше и правее лежит максимум резонансной кривой;
- при стремлении частоты вынуждающих возмущений к нулю, то есть $\Omega \to 0$, все кривые стремятся к одному и тому же, предельному значению $A_{ст} = \dfrac{f}{\omega_0^2}$, которое называют ***статическим отклонением***;
- при резонансной частоте вынуждающих возмущений $\Omega_{рез}$ амплитуда колебаний достигает максимального значения, равного

$$A_{рез} = \frac{f}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}};$$

- при стремлении частоты вынуждающих возмущений к бесконечности, то есть $\Omega \to \infty$, все кривые асимптотически стремятся к нулю.