

ТЕМА: МЕХАНИКА АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГО ТЕЛА

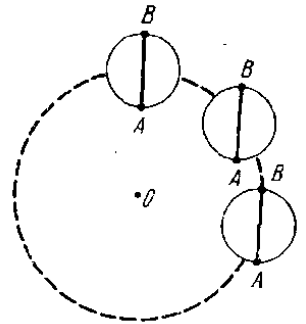
Абсолютно твёрдым телом называется тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Различают два основных вида движения абсолютно твёрдого тела:
поступательное и вращательное.

Поступательным называется движение, при котором любая прямая, проведённая в теле, остаётся параллельной сама себе при движении тела.

Особенность поступательного движения:

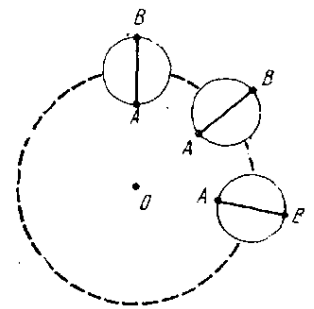
- при поступательном движении все точки тела движутся совершенно одинаково, то есть имеют одну и ту же линейную скорость $\vec{v}$, ускорение $\vec{a}$, траектории движения, совершают одинаковые перемещения $\Delta \vec{r}$ и проходят одинаковый путь S ;
- в этом случае, при описании движения тела, его можно рассматривать как материальную точку.



Вращательным называется движение, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой **осью вращения тела**.

Особенность вращательного движения:

- при вращательном движении все точки тела движутся с одной и той же угловой скоростью $\vec{\omega}$, угловым ускорением $\vec{\epsilon}$ и совершают одинаковые угловые перемещения $d\varphi$, имеют одинаковые период T и частоту вращения n .



Момент силы M

Опыт показывает, что при описании вращательного движения твёрдого тела, кроме величины и направления действующей на тело силы, важной характеристикой является ещё и точка приложения этой силы.

В связи с этим вводят в рассмотрение понятие момента силы $\vec{M}$.

Различают момент силы относительно точки $\vec{M}$ (векторная величина) и момент силы относительно оси M_z (скалярная величина).

Моментом силы $\vec{M}$ (эм) относительно неподвижной точки O называется векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки O в точку приложения силы $\vec{F}$, на саму эту силу:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}],$$

где $[M] = H \cdot m$, Ньютон - метр.

Величина $\vec{M}$ зависит от выбора точки O .

Моментом силы M_Z относительно неподвижной оси Z называется скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента силы $\vec{M}$ относительно любой точки O , выбранной на этой оси:

$$M_Z = [\vec{r}\vec{F}]_Z = Fd,$$

где M_Z - момент силы относительно неподвижной оси,

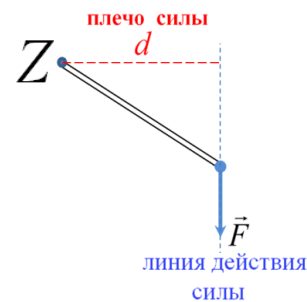
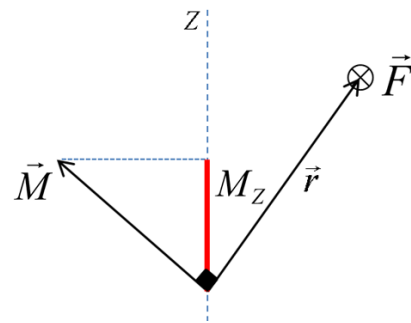
$[M_Z] = \text{Н} \cdot \text{м}$, Ньютон-метр;

d - плечо силы $\vec{F}$, м, метр.

Плечом силы d (дэ) называется скалярная величина, равная кратчайшему расстоянию от оси вращения Z до линии действия силы $\vec{F}$.

$[d] = \text{м}$, метр.

Величина M_Z не зависит от выбора точки O на оси вращения Z .



Условия равновесия твёрдого тела при плоской системе сил

Для того чтобы тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, находилось в состоянии равновесия или вращалось с постоянной угловой скоростью, необходимо выполнение одновременно двух условий.

Первое условие равновесия тела в инерциальной системе отсчёта:
векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю, то есть

$$\sum \vec{F}_i = 0.$$

Второе условие равновесия тела в инерциальной системе отсчёта (правило моментов):

тело находится в равновесии относительно неподвижной оси вращения Z , если сумма моментов сил, пытающихся повернуть тело по часовой стрелке, равна сумме моментов сил, пытающихся повернуть его против часовой стрелки:

$$\left(\sum M_i\right)_{\text{по}} = \left(\sum M_k\right)_{\text{против}}.$$

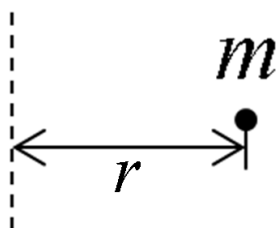
Момент инерции тела I

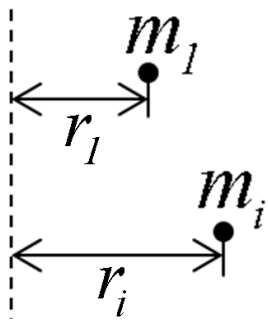
Наблюдения показывают, что при рассмотрении вращательного движения тела, основной характеристикой инертных свойств тела является не масса этого тела m , а величина, которая называется **моментом инерции тела I** (и).

Моментом инерции материальной точки относительно оси вращения Z называется скалярная величина I равная произведению массы материальной точки m на квадрат кратчайшего расстояния r^2 от оси вращения Z до рассматриваемой материальной точки:

$$I = mr^2.$$

$[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$, килограмм-метр в квадрате.





Моментом инерции системы материальных точек относительно оси вращения Z называется скалярная величина I_z , равная сумме произведений масс материальных точек системы m_i на квадраты кратчайших расстояний r_i^2 от оси вращения Z до рассматриваемых материальных точек системы:

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Реальное твёрдое тело можно рассматривать как совокупность бесконечного числа материальных точек. Поэтому,

моментом инерции твёрдого тела относительно неподвижной оси вращения Z называется скалярная величина I_z равная

$$I_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum m_i r_i^2 = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV,$$

где ρ - это функция зависимости распределения плотности тела в зависимости от координат, а сам интеграл вычисляется по всему объёму данного тела.

На практике, момент инерции тела обычно определяют опытным путём, так как математически его определить бывает очень сложно.

Собственный момент инерции тела

Собственным моментом инерции тела называется момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела.

Собственные моменты инерции некоторых однородных тел массой m

Таблица 1

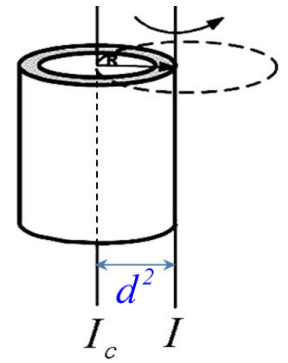
однородный тонкий стержень длиной l	однородный тонкий обруч радиусом R	однородный тонкий диск радиусом R	однородный сплошной цилиндр радиусом R	однородный шар радиусом R	однородная сфера радиусом R
$I = \frac{ml^2}{12}$	$I = mR^2$	$I = \frac{mR^2}{2}$	$I = \frac{mR^2}{2}$	$I = \frac{2}{5}mR^2$	$I = \frac{2}{3}mR^2$

Если необходимо найти момент инерции тела относительно произвольной оси, не проходящей через центр масс тела, то применяют *теорему Штейнера*.

Теорема Штейнера

Момент инерции твёрдого тела I относительно произвольной оси, не проходящей через центр масс тела, равен сумме момента инерции этого тела I_c относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной данной, и произведения массы этого тела m на квадрат расстояния между этими осями d^2 :

$$I = I_c + md^2.$$



Момент импульса L материальной точки и абсолютно твёрдого тела

Моментом импульса $\vec{L}$ (эль) материальной точки относительно неподвижной точки O называется векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки O в рассматриваемую материальную точку, на её импульс $\vec{p}$:

$$\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}],$$

где $[L] = \text{Дж} \cdot \text{с}$, Джоуль - секунда.

При этом следует помнить, что начало вектора $\vec{L}$ совпадает с точкой O , сам вектор $\vec{L}$ перпендикулярен одновременно векторам $\vec{r}$ и $\vec{p}$, а его величину можно определить по формулам

$$L = rp \sin \alpha = rmv \sin \alpha \quad \text{или} \quad L = pd = mvd,$$

где α - угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$,

$p = mv$ - импульс материальной точки,

d - кратчайшее расстояние от точки O до линии движения материальной точки, м, (см. рис. 6).

Величина $\vec{L}$ зависит от выбора точки O .

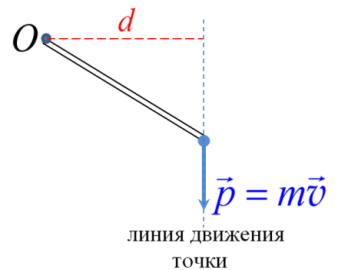


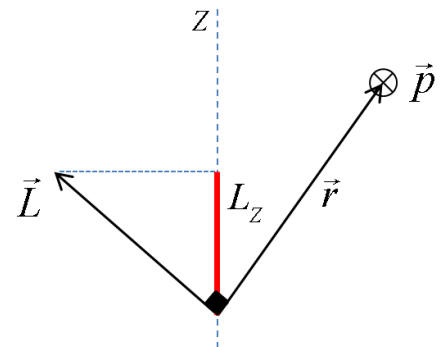
Рис. 6

Моментом импульса материальной точки L_z относительно неподвижной оси Z называется скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента импульса $\vec{L}$ относительно любой точки O , выбранной на этой оси:

$$L_z = [\vec{r} \vec{p}]_z,$$

где L_z - момент импульса относительно неподвижной оси,

$[L_z] = \text{Дж} \cdot \text{с}$, Джоуль-секунда;



Величина L_z не зависит от выбора точки O на оси вращения Z .

Моментом импульса L абсолютно твёрдого тела, вращающегося относительно неподвижной оси Z называется скалярная величина, равная произведению момент инерции этого тела I относительно оси вращения, на его угловую скорость ω :

$$L = I\omega,$$

где L (эль)-момент импульса твёрдого тела относительно оси вращения, Дж·с;

I - момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения, кг·м²;

ω - угловая скорость вращения тела, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Кинетическая энергия $E_{\kappa}^{\text{вращ}}$ абсолютно твёрдого тела, вращающегося вокруг оси

Кинетической энергией $E_{\kappa}^{\text{вращ}}$ абсолютно твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Z называется скалярная величина, равная половине произведения момента инерции этого тела I относительно оси вращения Z , на квадрат его угловой скорости ω^2 :

$$E_{\kappa}^{\text{вращ}} = \frac{I\omega^2}{2},$$

где $E_{\kappa}^{\text{вращ}}$ - кинетическая энергия вращающегося тела, Дж;

I - момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения, кг·м²;

ω - угловая скорость вращения тела, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

Теорема Кёнига

Полная кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося относительно собственной оси, движущейся поступательно (например, катятся цилиндр, шар, кольцо и т. п.), определяется по **теореме Кёнига**:

полная кинетическая энергия тела E равна сумме кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью движения его центра масс $E_{\kappa}^{\text{пост}}$ плюс кинетическая энергия вращательного движения тела $E_{\kappa}^{\text{вращ}}$ относительно оси проходящей через его центр масс: $E = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$,

где $E_{\kappa}^{\text{пост}} = \frac{mv_c^2}{2}$ - кинетическая энергия, обусловленная поступательным движением тела, Дж;

$E_{\kappa}^{\text{вращ}} = \frac{I_c\omega^2}{2}$ - кинетическая энергия, обусловленная вращательным движением тела, Дж;

E - полная кинетическая энергия движущегося тела, Дж;

v_c - скорость движения центра масс тела, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$;

m - масса твёрдого тела, кг; ω - угловая скорость вращения тела, $\frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

I_c - момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения, проходящей через центр масс тела, кг·м².

Основное уравнение динамики вращательного движения абсолютно твёрдого тела

В инерциальной системе отсчёта алгебраическая сумма моментов всех внешних сил $\sum M_i^{\text{внеш}}$, действующих на тело относительно неподвижной оси вращения Z , равна произведению момента инерции этого тела относительно этой оси I , на сообщённое ему угловое ускорение ε :

$$\sum M_i^{\text{внеш}} = I \varepsilon \quad \text{или} \quad M_{\text{рез}}^{\text{внеш}} = I \varepsilon,$$

где $M_{\text{рез}}^{\text{внеш}} = \sum M_i^{\text{внеш}}$ - результирующий момент всех внешних сил, действующих на тело относительно неподвижной оси вращения Z .

Работа силы при вращательном движении твёрдого тела

Работой A произвольной силы при вращении твёрдого тела вокруг оси Z называется скалярная величина, равная

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi,$$

где A - работа силы, Дж,

M - функция зависимости момента силы, действующего на тело от его угла поворота φ относительно неподвижной оси вращения Z , $H \cdot m$;

φ_1 и φ_2 - начальный и конечный угол поворота тела, рад, (радиан)

$d\varphi$ - элементарный угол поворота тела, рад.

Работой A постоянной по величине силы при вращении твёрдого тела вокруг оси Z называется скалярная величина, равная

$$A = M \Delta\varphi,$$

где M - постоянный по величине момент силы, действующий на тело относительно неподвижной оси вращения Z , $H \cdot m$;

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ - угол поворота тела вокруг оси Z , рад.

Мощность силы при вращательном движении твёрдого тела

Различают среднюю $\langle N \rangle$ и мгновенную N мощность силы при вращательном движении.

Средней мощностью $\langle N \rangle$ силы при вращательном движении относительно оси Z называется скалярная величина, равная отношению работы A силы при вращении тела за какой-то промежуток времени t , к величине этого промежутка времени.

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t}.$$

Мгновенной мощностью N силы при вращательном движении относительно оси Z называется скалярная величина, равная первой производной работы силы по времени.

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Центр масс тела

Центром масс системы материальных точек называется **точка**, которой можно определить по формулам:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

или

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

где $\vec{r}_c$ - радиус-вектор центра масс; x_i, y_i, z_i - координаты i -той материальной точки;
 m_i - масса i -той материальной точки; x_c, y_c, z_c - координаты центра масс;

Центр масс однородных симметричных тел совпадает с их геометрическим центром.