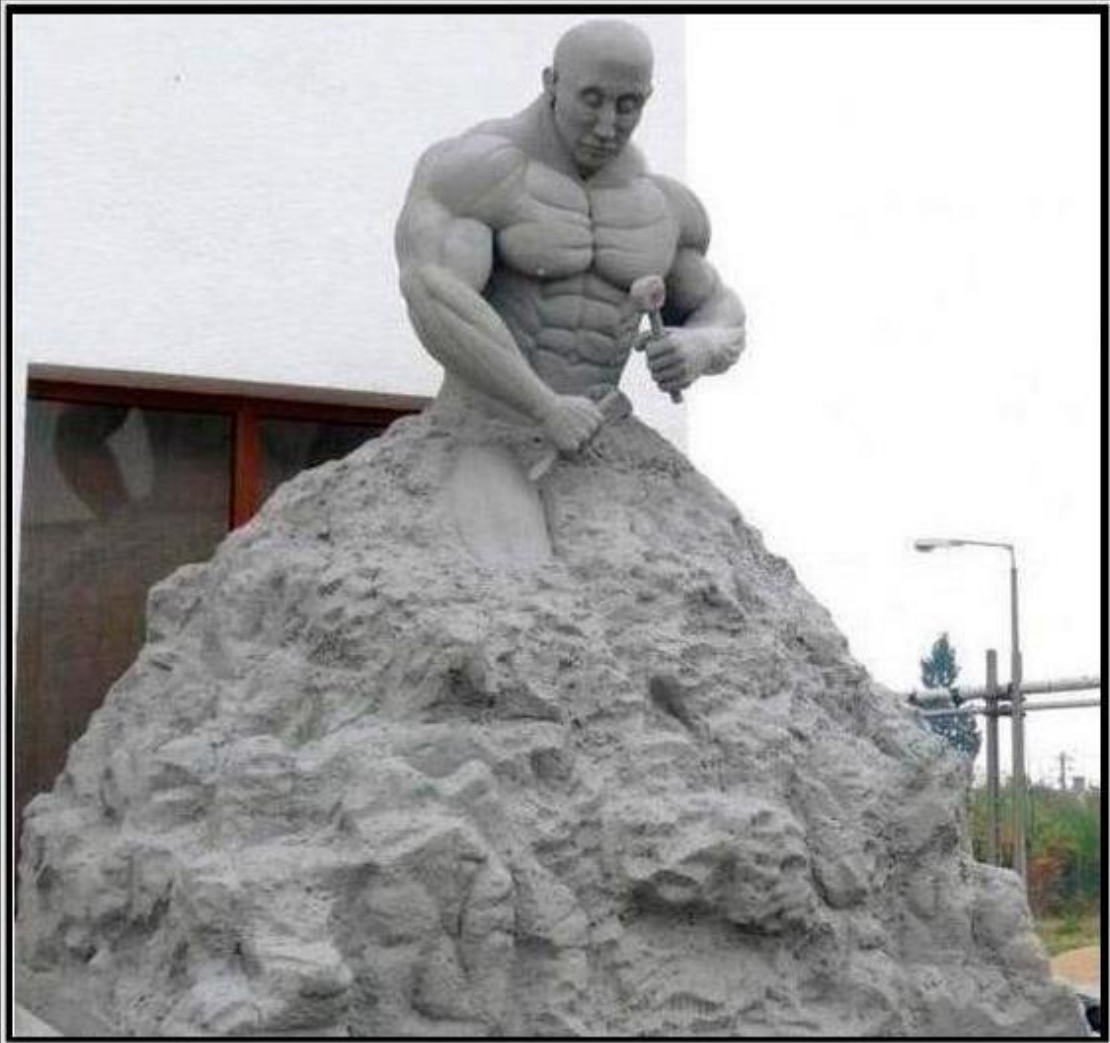


ОГЛАВЛЕНИЕ

Алгоритм решения задач	5
Общая схема решения задач	6
1. Кинематика	9
Схема решения задач по кинематике поступательного движения твёрдого тела	29
Схема решения задач по кинематике движения материальной точки по окружности или вращательного движения твёрдого тела	32
Примеры решения задач по кинематике	33
2. Динамика	59
Схема решения задач по динамике материальной точки или поступательного движения абсолютно твёрдого тела	72
Схема решения задач по динамике равномерного движения материальной точки по окружности	74
Схема решения задач по динамике материальной точки в неинерциальной системе отсчёта	75
Примеры решения задач по динамике	76
3. Гидростатика	91
Схема решения задач на применение законов гидростатики	97
Примеры решения задач по гидростатике	99
4. Импульс. Работа. Мощность. КПД. Виды энергии	103
Схема решения задач на определение механической работы	109
Схема решения задач на определение механической мощности	110
Схема решения задач на определение КПД	111
Примеры решения задач	111
5. Механика абсолютно твёрдого тела	114
Схема решения задач по динамике вращательного движения абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси	121
Примеры решения задач по динамике вращательного движения абсолютно твёрдого тела	122
6. Законы изменения и сохранения в механике	136
Схема решения задач на законы изменения и сохранения импульса	143
Схема решения задач на законы изменения и сохранения момента импульса	144
Схема решения задач на законы изменения и сохранения полной механической энергии	145
Схема решения задач по теореме о кинетической энергии	146

Схема решения задач по теореме о потенциальной энергии	147
Примеры решения задач на законы изменения и сохранения в механике	148
Действия над векторами	194
Произвольный и прямоугольный треугольник	197
Таблица $\sin$ и $\cos$	198
Действия над степенями	198



Самая трудная работа - это работа над собой!

«Знать физику - означает уметь решать задачи» Э. Ферми

Для успешного решения задач по физике необходимо:

1. Хорошо знать формулы и законы физики и уметь правильно их применять.
2. Знать размерности всех величин и уметь правильно переводить размерности величин из одной системы в другую.
3. Уметь определять тип задачи (то есть к какому разделу физики она относится и какой алгоритм решения можно применить к данной задаче).
4. Иметь навык анализа полученной формулы и окончательного числового ответа.

Алгоритм решения задач по физике

Универсальной методики решения задач не существует, поэтому мы будем разбирать примерный алгоритм решения задач по разным разделам физики, который облегчит Вам поиск правильного ответа.

Существует три основных способа поиска неизвестной величины:

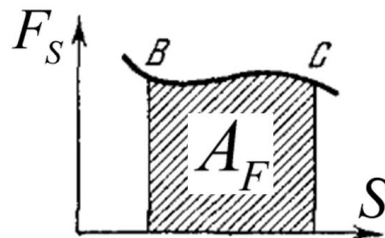
1. её можно найти непосредственно по формуле - определению данной величины, например, механическую работу постоянной по величине и направлению силы - по формуле $A = FScos\alpha$,

силу тока - по формуле $I = \frac{q}{t}$ и так далее;

2. если задача более сложная, то предыдущим способом определить искомую величину не удаётся. В этом случае её находят по какому-либо закону, например, механическую работу силы можно определить по закону изменения полной механической энергии или теореме о кинетической энергии, а силу тока по закону Ома и так далее. В этом случае применяют определённую схему решения задач;
3. и, наконец, третий способ определения неизвестной величины - графический или геометрический.

Например,

- механическую работу силы можно найти как площадь фигуры под кривой графика зависимости силы, действующей на тело, от пройденного телом пути,



- или используя векторный характер уравнения. Например, импульс системы двух материальных точек удобнее определить геометрически и решить векторный треугольник импульсов, используя либо теорему Пифагора для прямоугольного треугольника, либо теорему косинусов для произвольного треугольника.

Первый способ самый простой и требует применения лишь формулы-определения данной величины.

Второй способ требует знания различных законов и основных схем решения задач.

Третий способ опирается на векторную алгебру и геометрию. Однако общие рекомендации к решению любых задач являются универсальными, поэтому очень внимательно их разберите.

Общая схема решения задач

1. Внимательно прочитайте задачу. Выясните, к какому разделу физики она относится, и какие законы в ней надо использовать. Задачи могут быть комбинированными, то есть для их решения необходимо применение законов нескольких разделов физики.

2. Сделайте краткую запись условия задачи. Все данные задачи необходимо выразить в единицах системы СИ, так как все формулы, которые Вы изучаете, записаны именно в этой системе.

3. Приступая к решению задачи, очень важно правильно поставить вопрос к задаче. Возможны следующие варианты:

а. необходимо найти значение какого – либо параметра, например, скорость тела v в какой-то момент времени, его высоту подъёма h и т.д.

Такие задачи решаются тремя основными способами:

- используя формулу-определение данной величины;
- применяя какой-либо закон, в который эта величина входит;
- используя геометрический смысл данной величины или графический способ её нахождения;

б. необходимо определить **на сколько** изменилась данная величина в результате какого – либо процесса.

В этом случае находят разность конечного и начального значений данной величины, например,

$$\Delta v = v_2 - v_1.$$

При этом если окажется, что $\Delta v > 0$, то искомая величина увеличилась, если $\Delta v < 0$, то она уменьшилась, если же $\Delta v = 0$, то она не изменилась.

Необходимо обратить особое внимание, если речь идёт о векторной величине.

Если просят найти, на сколько изменилась данная векторная величина в результате какого – либо процесса, то надо найти следующее выражение

$$|\Delta \vec{v}| = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|.$$

Если же просят найти, на сколько изменился модуль данной величины, то необходимо найти следующее выражение

$$\Delta v = |\vec{v}_2| - |\vec{v}_1|;$$

в. необходимо определить **во сколько раз** изменилась данная величина в результате какого – либо процесса.

В этом случае необходимо найти отношение конечного и начального

значений данной величины, например, $\frac{v_2}{v_1}$.

При этом если окажется, что $\frac{v_2}{v_1} > 1$, то искомая величина

увеличилась, если $\frac{v_2}{v_1} < 1$, то она уменьшалась, а если $\frac{v_2}{v_1} = 1$, то не

изменилась;

г. если в задаче спрашивается: «на сколько процентов изменилась данная величина v ?», то надо найти следующее выражение:

$$\varepsilon = \frac{v_2 - v_1}{v_1} \cdot 100\%,$$

где v_1 и v_2 - начальное и конечное значения величины v .

Если при этом окажется, что $\varepsilon > 0$, то искомая величина увеличилась на столько-то процентов, если $\varepsilon < 0$, то она уменьшалась на столько-то процентов, а если $\varepsilon = 1$, то она не изменилась.

4. Сделайте чертёж, схему или рисунок, поясняющие условие задачи. Укажите на чертеже все данные и искомые величины задачи.

В задачах механики обычно первый вопрос, который надо поставить перед собой, каков характер движения?

5. Напишите уравнение или систему уравнений, отображающих происходящий в условии задачи физический процесс. При необходимости выберите удобную систему координат и запишите векторные уравнения в проекциях на оси координат.

6. Используя условия задачи и чертеж, преобразуйте исходные равенства так, чтобы в конечном виде в них входили лишь упомянутые в условиях задачи величины и табличные данные. Если число неизвестных окажется больше числа уравнений, необходимо дополнить полученную систему уравнениями связи, которые следуют из условия задачи или сделанного рисунка, либо дописать уравнения или законы из других разделов физики (обычно уравнения динамики дополняют законами сохранения и т.д.).

Общий принцип следующий: ***сколько неизвестных величин в уравнениях, столько же должно быть и формул.***

7. Решите задачу, не делая промежуточных вычислений, получив окончательную формулу в буквенном виде. Это обусловлено тем, что решение по частям может не получиться, так как некоторые неизвестные величины, появляющиеся по ходу решения, могут сократиться лишь при подстановке в окончательную формулу.

8. После получения окончательной формулы, необходимо убедиться, что все величины известны (возможно, что некоторые из них необходимо будет взять из таблиц) и ***проверить размерность полученного равенства***, предварительно переведя все величины в систему единиц СИ. Для этого в окончательную формулу необходимо подставить не числа, а размерности этих величин и произвести математические действия, как с обычными числами. При этом следует помнить, что складывать и вычитать можно только одну и ту же размерность, а в степенях, под логарифмами и в аргументах тригонометрических функций должны быть безразмерные величины.

Если окажется, что размерность левой части уравнения не сходится с размерностью правой части уравнения, то Вы задачу решили не правильно.

9. После проверки размерности необходимо подставить в окончательную формулу исходные данные и произвести вычисления.

10. Запишите окончательный ответ и проанализируйте полученный результат на правдоподобность ответа (например, скорость тела не может быть больше скорости света в вакууме, КПД двигателя не может быть больше единицы, муха не может сама лететь со скоростью 300 км/ч и так далее).

1. КИНЕМАТИКА

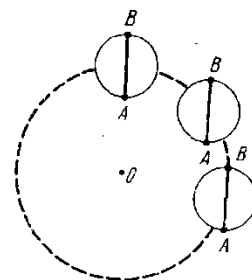
Материальной точкой называется тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Абсолютно твёрдым телом называется тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Из определения следует, что материальная точка является моделью твёрдого тела и её понятие используется во многих задачах лишь для их упрощения. Однако, если реальное тело перемещается в пространстве поступательно, то все его точки движутся совершенно одинаково. В этом случае *тело можно рассматривать как материальную точку* и применять к нему все закономерности механики, которые справедливы для материальной точки.

Различают два основных вида движения абсолютно твёрдого тела: *поступательное* и *вращательное*.

Поступательным называется движение, при котором любая прямая, проведённая в теле, остаётся параллельной сама себе при движении тела.



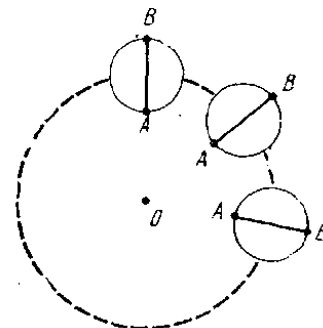
Основными особенностями поступательного движения являются следующие обстоятельства:

- при поступательном движении все точки тела движутся совершенно одинаково, то есть имеют одну и ту же линейную скорость $\vec{v}$, ускорение $\vec{a}$, траектории движения, совершают одинаковые перемещения $\Delta \vec{r}$ и проходят одинаковый путь S ;
- в этом случае, при описании движения тела, его можно рассматривать как материальную точку.

Вращательным называется движение, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой **осью вращения тела**.

Основной особенностью вращательного движения является следующее обстоятельство:

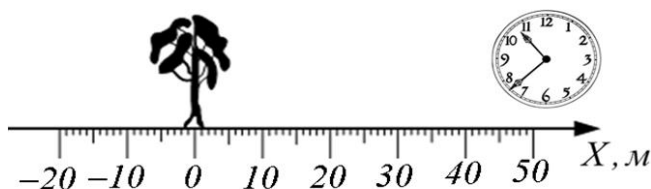
- при вращательном движении все точки тела движутся с одной и той же угловой скоростью $\vec{\omega}$, угловым ускорением $\vec{\epsilon}$ и совершают одинаковые угловые перемещения $d\varphi$.



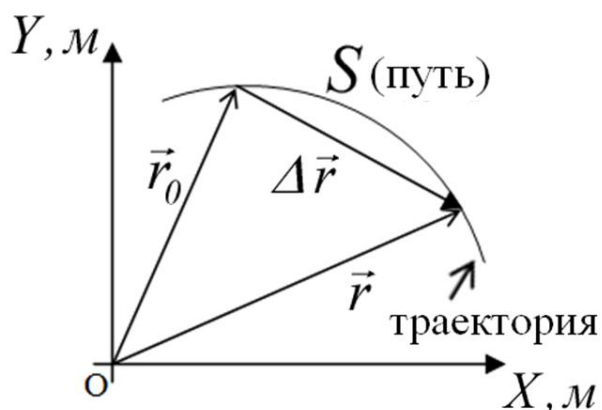
Основные понятия кинематики

Механическим движением называется изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени.

Для описания механического движения тела ввели понятие системы отсчёта.



Системой отсчёта называется совокупность тела отсчёта, системы координат и часов для измерения времени.



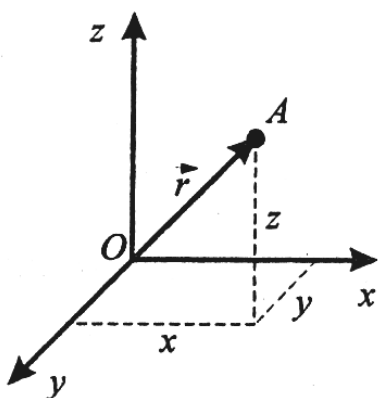
Траекторией называется линия, по которой двигалось тело.

Путем S (эс) называется скалярная величина, равная длине траектории, по которой двигалось тело.

Перемещением $\Delta \vec{r}$ (дэльта эр) называется вектор, проведённый из начального положения материальной точки в её конечное положение:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0.$$

Размерность перемещения $[\Delta \vec{r}] = [м]$, метр.



Радиус - вектором $\vec{r}$ (эр) называется вектор, проведённый из начала координат в рассматриваемую материальную точку:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad [r] = м,$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы направлений координатных осей (орты);

x, y, z - координаты тела, м.

Модуль радиус - вектора $|\vec{r}| \equiv r$ равен

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

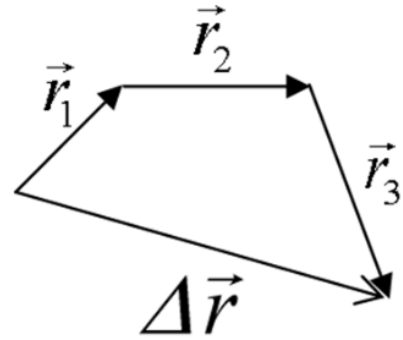
Кинематика поступательного движения

Линейная скорость $\vec{v}$

Для характеристики быстроты перемещения тела в пространстве ввели понятие скорости.

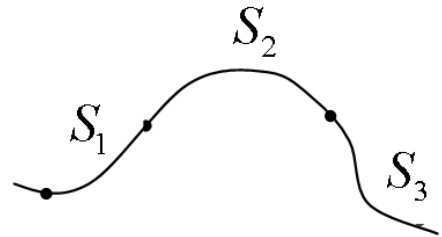
Различают среднюю скорость $\langle \vec{v} \rangle$, среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$ и мгновенную скорость $\vec{v}$.

Средней скоростью $\langle \vec{v} \rangle$ (вэ) (или **средней скоростью перемещения**) называется векторная величина, равная отношению перемещения тела $\Delta \vec{r}$ за какой-либо промежуток времени Δt , к величине этого промежутка времени:



$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}.$$

Средней путевой скоростью $\langle v \rangle$ (вэ) называется скалярная величина, равная отношению пути S , пройденного телом за какой-либо промежуток времени t , к величине этого промежутка времени:



$$\langle v \rangle = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}.$$

Особый случай: Если тело за рассматриваемый промежуток времени движется в одном и том же направлении с одним и тем же по величине и направлению ускорением (то есть $\vec{a} = \text{const}$), то среднюю скорость тела за этот промежуток времени можно определить по формуле $\langle v \rangle = \frac{v_1 + v_2}{2}$, где v_1 и v_2 - это начальная и конечная скорость тела на этом участке.

Мгновенной скоростью $\vec{v}$ (вэ) называется векторная величина, равная первой производной радиус-вектора $\vec{r}$ материальной точки по времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

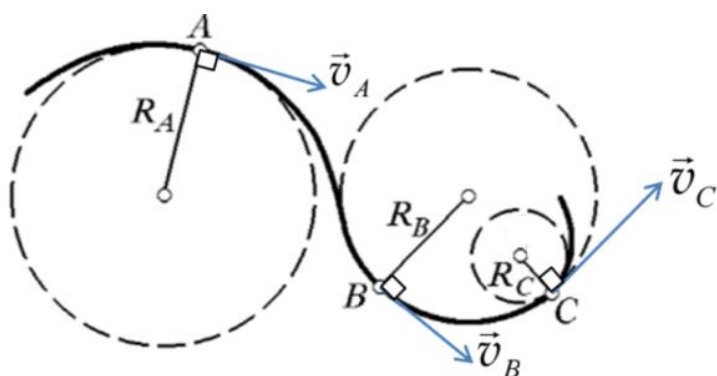
где $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$ - проекции вектора скорости тела $\vec{v}$ на оси координат x, y, z .

Модуль вектора мгновенной скорости равен $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Размерность скорости $[v] = \frac{\mathcal{M}}{c}$, метр в секунду.

Физический смысл линейной скорости v : она показывает, какой путь проходит тело за одну секунду при равномерном движении.

(например: $v = 5 \frac{\mathcal{M}}{c}$ означает, что за одну секунду тело проходит путь равный 5 метрам).



Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории движения тела.

Линейное ускорение $\vec{a}$

Для характеристики быстроты изменения вектора скорости тела $\vec{v}$ по величине и направлению ввели понятие ускорения $\vec{a}$.

Различают среднее $\langle \vec{a} \rangle$ и мгновенное $\vec{a}$ ускорения.

Средним ускорением $\langle \vec{a} \rangle$ (а) называется векторная величина, равная отношению изменения вектора скорости тела $\Delta \vec{v}$ за какой-то промежуток времени Δt , к величине этого промежутка времени:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1},$$

где v_1 - это начальная скорость тела в момент времени t_1 ;

v_2 - это конечная скорость тела в момент времени t_2 .

Мгновенным ускорением $\vec{a}$ (a) называется векторная величина, равная первой производной мгновенной скорости тела по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

где $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, $a_y = \frac{dv_y}{dt}$, $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ - проекции вектора ускорения тела $\vec{a}$ на оси координат x, y, z .

Модуль вектора мгновенного ускорения равен $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

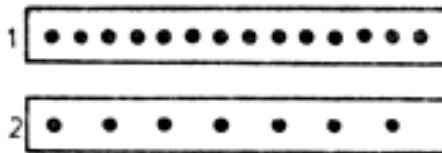
Размерность ускорения $[a] = \frac{m}{c^2}$, метр на секунду в квадрате.

Физический смысл линейного ускорения a : оно показывает, на сколько метров в секунду изменяется скорость тела за одну секунду при равнопеременном движении.

(например: $a = 10 \frac{m}{c^2}$ означает, что за одну секунду скорость тела изменяется на 10 метров в секунду).

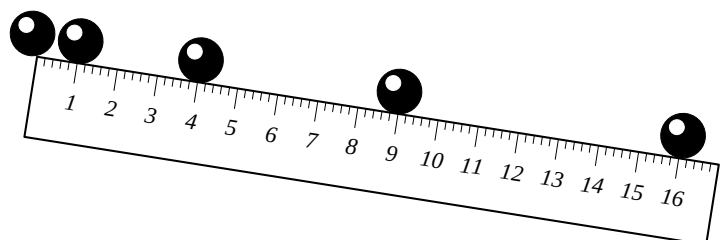
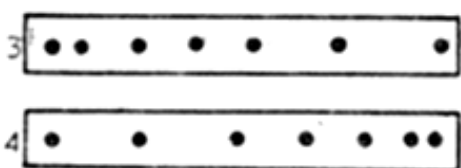
Если скорость точки $\vec{v}$ не меняется по величине с течением времени, то такое движение называется **равномерным**.

В этом случае тело за равные промежутки времени проходит одинаковое расстояние.



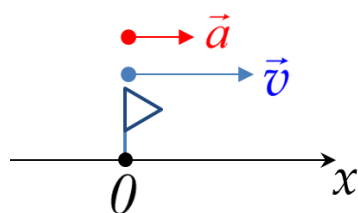
Если скорость точки $\vec{v}$ изменяется с течением времени, то такое движение называется **неравномерным**.

В этом случае тело за равные промежутки времени проходит неодинаковое расстояние.



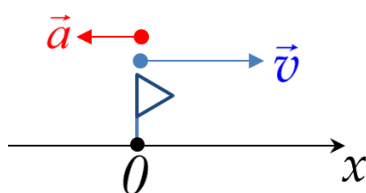
Прямолинейное движение материальной точки

При прямолинейном движении возможны следующие ситуации:



- вектор ускорения точки $\vec{a}$ сонаправлен с вектором мгновенной скорости точки $\vec{v}$.

В этом случае скорость точки с течением времени будет увеличиваться. Такое движение называют **ускоренным движением**;



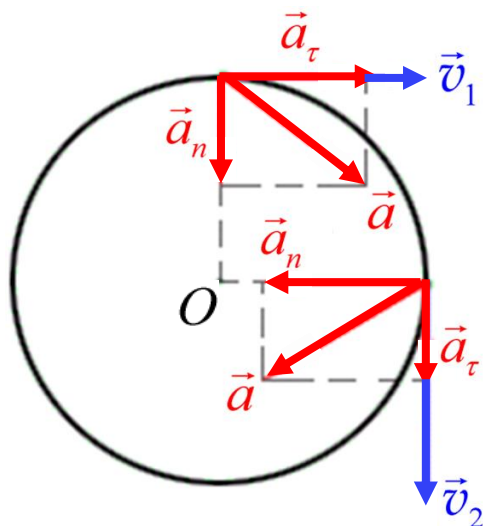
- вектор ускорения точки $\vec{a}$ направлен в противоположную сторону вектору мгновенной скорости $\vec{v}$.

В этом случае скорость точки с течением времени будет уменьшаться. Такое движение называют **замедленным движением**.

Криволинейное движение материальной точки

При криволинейном движении материальной точки вектор ускорения $\vec{a}$ в общем случае не параллелен вектору мгновенной скорости $\vec{v}$, а образует с ним некоторый угол α .

В этом случае вектор полного ускорения $\vec{a}$ удобно разложить на две составляющие a_τ и a_n :



$a_\tau = \frac{dv}{dt}$ - **тангенциальное** (или **касательное**) ускорение.

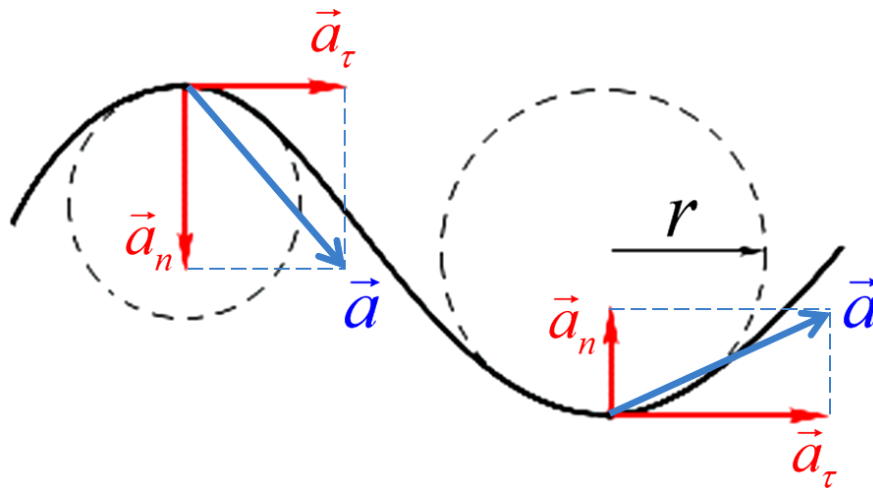
Оно характеризует быстроту изменения вектора скорости по величине, направлено по касательной к траектории движения точки и равно первой производной мгновенной скорости точки v по времени t ;

$a_n = \frac{v^2}{r}$ - **нормальное** (или **центростремительное**) ускорение,

где v - мгновенная скорость в данной точке траектории, м/с;

r - радиус кривизны в данной точке траектории, м.

Оно характеризует быстроту изменения направления вектора скорости в пространстве и направлено к центру кривизны траектории.



Из вышеприведённого рисунка следует, что полное ускорение материальной точки при криволинейном движении равно

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau.$$

Модуль полного ускорения материальной точки a при криволинейном движении равен $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

Кинематика вращательного движения

Для описания вращательного движения вводят в рассмотрение следующие понятия.

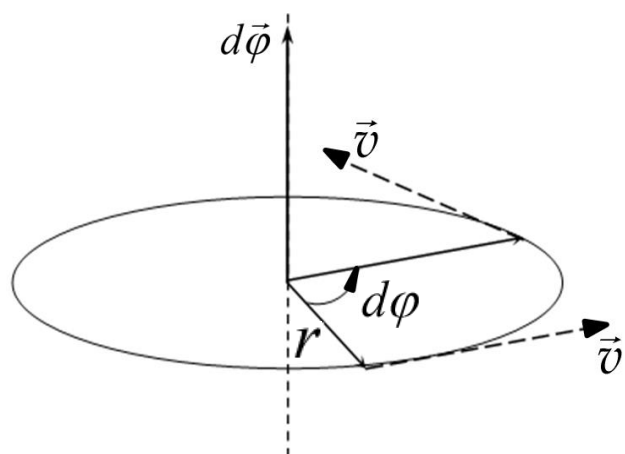
Угол поворота φ

Углом поворота φ (фи) называется угол, на который поворачивается радиус-вектор $\vec{r}$ любой точки тела при его вращении.

Размерность угла поворота $[\varphi] = \text{рад}$, радиан.

Элементарное угловое перемещение $d\varphi$ можно рассматривать как вектор $d\vec{\varphi}$, направление которого определяется по **правилу буравчика** (правилу правого винта):

если буравчик установить вдоль оси вращения тела и вращать рукоятку буравчика по направлению вращения тела, то поступательное движение буравчика укажет направление вектора $d\vec{\varphi}$.



Удобство такого введения в следующем:

- модуль вектора $d\vec{\varphi}$ однозначно определяет величину элементарного поворота тела $d\varphi$;
- направление вектора $d\vec{\varphi}$ через правило буравчика определяет направление вращения тела;
- положение вектора $d\vec{\varphi}$ в пространстве определяет ось вращения тела.

Угловая скорость ω

Для характеристики быстроты вращения тела в пространстве вводится понятие **угловой скорости ω** (омега).

Различают среднюю $\langle \omega \rangle$ и мгновенную $\vec{\omega}$ угловую скорость.

Средней угловой скоростью $\langle \omega \rangle$ называется скалярная величина, равная отношению угла поворота тела $\Delta\varphi$ за какой-то промежуток времени Δt к величине этого промежутка времени:

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Мгновенной угловой скоростью $\vec{\omega}$ называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Размерность угловой скорости $[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, радиан в секунду.

Физический смысл угловой скорости ω : она показывает, на сколько радиан поворачивается радиус-вектор любой точки тела за одну секунду при равномерном вращении.

(например: $\omega = 2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ означает, что за каждую секунду радиус-вектор материальной точки $\vec{r}$ поворачивается на 2 радиана).

Направление угловой скорости $\vec{\omega}$ совпадает с направлением вектора $d\vec{\varphi}$, то есть направление $\vec{\omega}$ также определяется по правилу буравчика.

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$

Для характеристики быстроты изменения угловой скорости вводится понятие **углового ускорения** $\vec{\varepsilon}$ (эпсилон).

Различают среднее $\langle \varepsilon \rangle$ и мгновенное $\vec{\varepsilon}$ угловое ускорение.

Средним угловым ускорением $\langle \varepsilon \rangle$ называется скалярная величина, равная отношению изменения угловой скорости тела $\Delta\omega$ за какой-то промежуток времени Δt к величине этого промежутка времени:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Мгновенным угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$ называется векторная величина, равная первой производной мгновенной угловой скорости тела по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Размерность углового ускорения $[\varepsilon] = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$, радиан на секунду в квадрате.

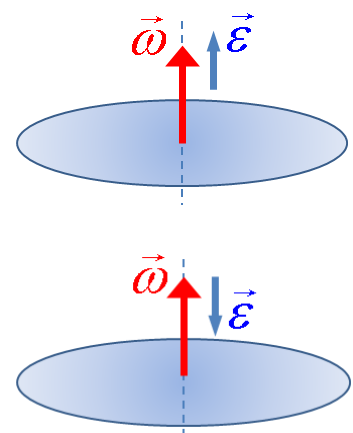
Физический смысл углового ускорения ε : оно показывает, на сколько радиан в секунду изменяется угловая скорость тела за одну секунду при равнопеременном вращении.

(например: $\varepsilon = 1 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$ означает, что за каждую секунду угловая скорость тела изменяется на $1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$).

Направление вектора углового ускорения $\vec{\varepsilon}$:

- совпадает с направлением вектора $d\vec{\omega}$, то есть оно сонаправлено с вектором $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении тела;

- и противоположно направлено вектору $\vec{\omega}$ при замедленном вращении.



Периодическим движением называется движение, повторяющееся через одинаковые промежутки времени.

Периодом называется минимальный интервал времени, через который движение или процессы повторяются в той же самой последовательности.

Периодом вращения T (тэ) называется скалярная величина, равная времени одного полного оборота вокруг оси вращения:

$$T = \frac{t}{N},$$

где t (тэ) - время, за которое точка делает N оборотов, с;

N (эн) - число оборотов за время t .

Размерность периода $[T] = c$, секунда

Частотой вращения n (эн) называется скалярная величина, равная числу оборотов за единицу времени:

$$n = \frac{N}{t},$$

где N (эн) - число оборотов за время t ;

t (тэ) - время, за которое точка делает N оборотов.

Размерность частоты вращения $[n] = \frac{об}{c} \equiv \frac{1}{c}$, оборотов в секунду.

Связь линейных и угловых величин

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \varphi r \\ v = \omega r \\ a_{uc} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega v \end{array} \right. \quad \text{или в векторном виде} \quad \left\{ \begin{array}{l} d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \vec{r}] \\ \vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}] \\ \vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \vec{r}] \\ \vec{a}_n = [\vec{\omega} \vec{v}] \end{array} \right. ;$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau ;$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} ;$$

$$T = \frac{1}{n} ;$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n .$$

Уравнения поступательного движения

Уравнениями поступательного движения называются уравнения, по которым можно определить радиус-вектор тела $\vec{r}$ или координаты тела x, y, z в любой момент времени.

Зная уравнения движения, можно определить мгновенную скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ тела в любой момент времени:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \quad \text{и} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

где $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$ - проекции скорости $\vec{v}$ на оси координат;

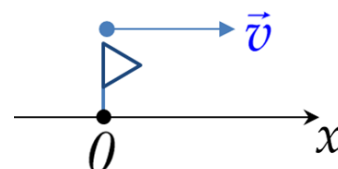
$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt} - \text{проекции ускорения тела на оси координат.}$$

Модуль вектора мгновенной скорости равен $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

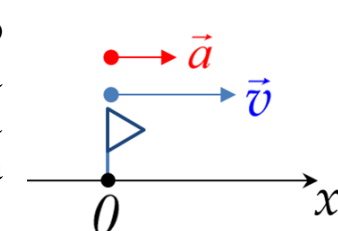
Модуль вектора мгновенного ускорения равен $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Различают следующие наиболее простые виды прямолинейного поступательного движения

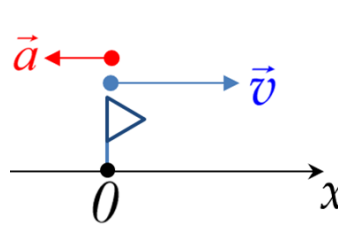
- **равномерное прямолинейное движение** (это движение с постоянной по модулю и направлению скоростью);



- **равноускоренное прямолинейное движение** (это прямолинейное движение, при котором скорость тела постоянно увеличивается на одну и ту же величину за единицу времени. При этом ускорение тела параллельно скорости и постоянно по модулю);



- **равнозамедленное прямолинейное движение** (это прямолинейное движение, при котором скорость тела постоянно уменьшается на одну и ту же величину за единицу времени. При этом ускорение направлено противоположно скорости и постоянно по модулю);



- **переменное движение** - движение с изменяющимся ускорением $\vec{a}$.

Уравнения поступательного движения

1. Равномерное поступательное движение:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t; \quad \vec{v} = \text{const}; \quad \vec{a} = 0.$$

2. Равнопеременное поступательное движение:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}; \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t; \quad \vec{a} = \text{const};$$

или в скалярном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \pm x_0 \pm v_{ox} t \pm \frac{a_x t^2}{2} \\ y = \pm y_0 \pm v_{oy} t \pm \frac{a_y t^2}{2} \\ z = \pm z_0 \pm v_{oz} t \pm \frac{a_z t^2}{2} \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = \pm v_{ox} \pm a_x t \\ v_y = \pm v_{oy} \pm a_y t \\ v_z = \pm v_{oz} \pm a_z t \end{array} \right.$$

3. Неравномерное поступательное движение:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t) dt \quad \text{или} \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t) dt,$$

а также
$$S = \int_0^t v(t) dt \quad \text{и} \quad v = v_0 + \int_0^t a(t) dt.$$

Скорость v и путь S при различных видах движения

- При равномерном движении: $v = \text{const}$ и $S = vt$.

- При равноускоренном движении: $v = v_0 + at$ и $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

- При равнозамедленном движении: $v = v_0 - at$ и $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$.

При необходимости эти уравнения можно дополнить следующими уравнениями связи:

$$v^2 - v_0^2 = 2aS, \quad \text{если движение равноускоренное,}$$

$$v^2 - v_0^2 = -2aS, \quad \text{если движение равнозамедленное,}$$

где v_0 и v - начальная и конечная скорость тела на участке пути S ;

a - ускорение тела на этом участке пути.

Уравнения вращательного движения

Уравнением вращательного движения называется уравнение, по которому можно определить угол поворота тела φ в любой момент времени.

Зная уравнение вращательного движения, можно определить мгновенную угловую скорость и угловое ускорение тела в любой момент времени:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad \text{и} \quad \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Различают следующие виды вращательного движения

Равномерное вращательное движение -

это движение с постоянной по модулю и направлению угловой скоростью ω .

Равноускоренное вращательное движение -

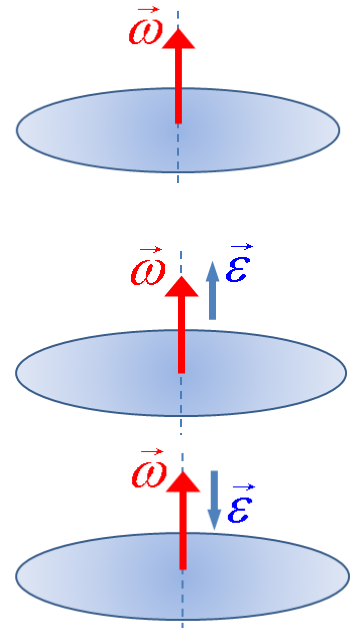
это движение, при котором угловая скорость тела постоянно увеличивается на одну и ту же величину за единицу времени. При этом угловое ускорение параллельно скорости и постоянно по модулю.

Равнозамедленное вращательное движение -

это движение, при котором угловая скорость тела постоянно уменьшается на одну и ту же величину за единицу времени. При этом угловое ускорение направлено противоположно скорости и постоянно по модулю.

Переменное вращательное движение -

это движение с изменяющимся угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$.



Уравнения вращательного движения

1. Равномерное вращательное движение: $\varphi = \pm\varphi_0 \pm \omega_0 t$; $\vec{\omega} = const$.
2. Равнопеременное вращательное движение:

$$\varphi = \pm\varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}; \quad \omega = \pm\omega_0 \pm \varepsilon t; \quad \vec{\varepsilon} = const.$$

При необходимости эти уравнения можно дополнить следующими уравнениями связи: $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi$, если движение равноускоренное,

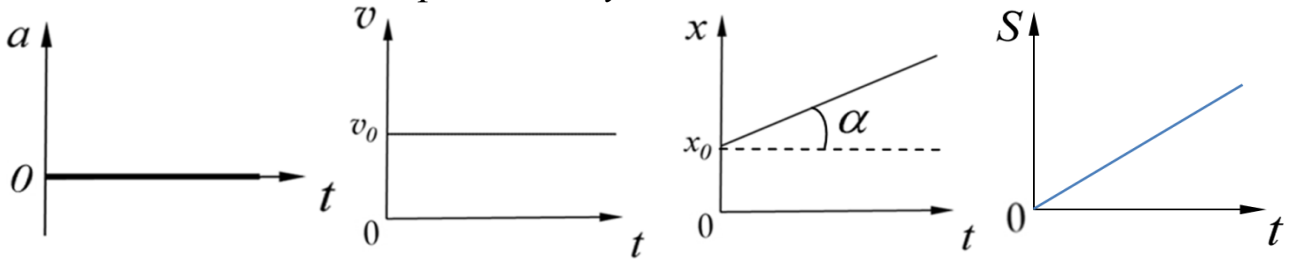
$\omega^2 - \omega_0^2 = -2\varepsilon\varphi$, если движение равнозамедленное.

3. Неравномерное вращательное движение:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega(t) dt \quad \text{и} \quad \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon(t) dt.$$

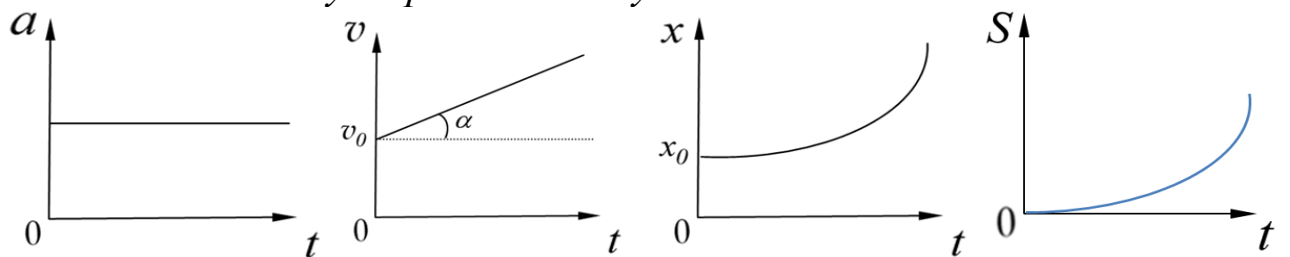
Графики механического движения

Равномерное поступательное движение



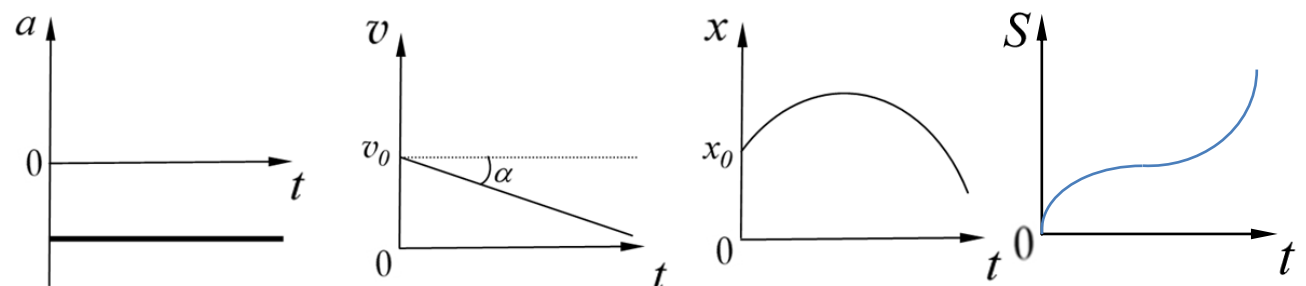
При равномерном движении скорость тела изменяется по закону $v = \text{const}$, а пройденный телом путь, - $S = vt$.

Равноускоренное поступательное движение



При равноускоренном движении скорость тела изменяется по закону $v = v_0 + at$, а пройденный телом путь, - $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

Равнозамедленное поступательное движение

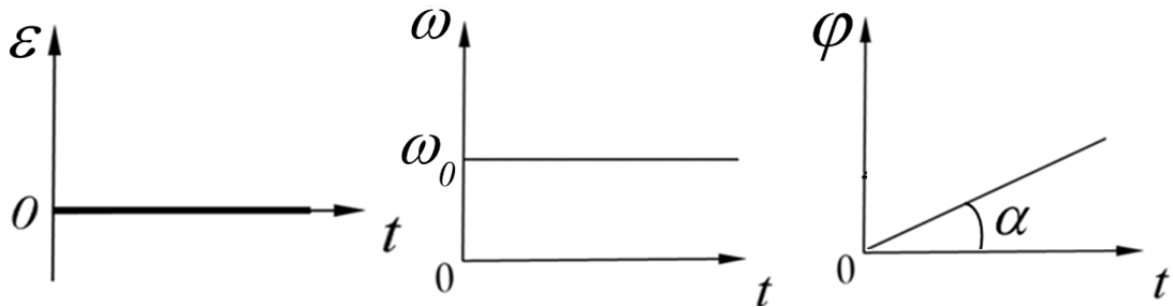


При равнозамедленном движении скорость тела изменяется по закону $v = v_0 - at$, а пройденный телом путь, - $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$.

Следует помнить отличия между пройденным путём S и координатой тела X :

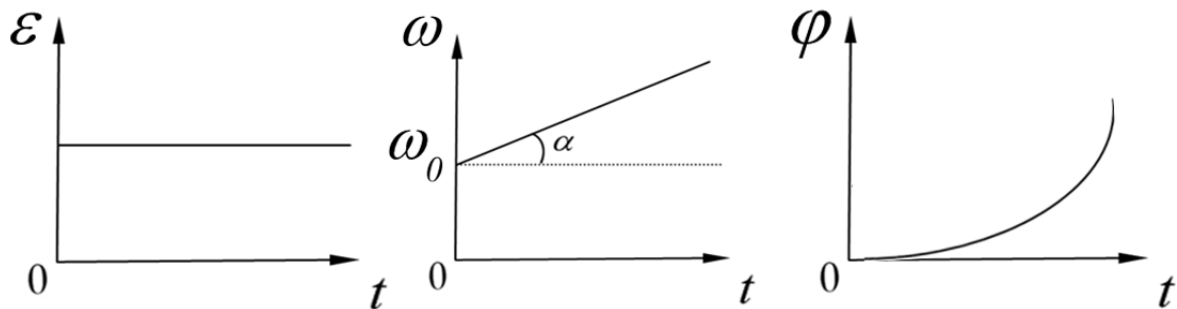
- путь S всегда величина положительная и может только возрастать;
- координата тела может быть положительной, отрицательной и равной нулю, а так же, как увеличиваться, так и уменьшаться с течением времени;
- перемещение может как увеличиваться, так и уменьшаться, но быть только положительной величиной. При возвращении тела в исходное положение, перемещение тела будет равно нулю.

Равномерное вращательное движение



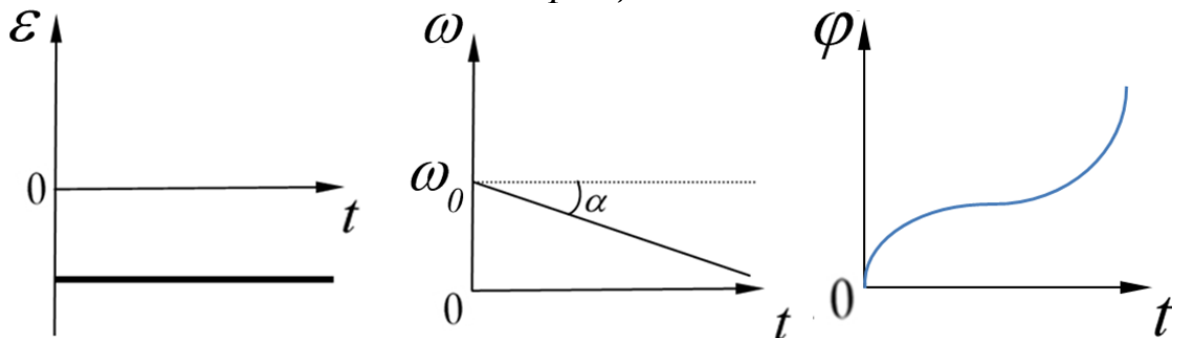
При равномерном вращательном движении скорость тела изменяется по закону $\vec{\omega} = \text{const}$, а угол, на который повернулось тело, - $\varphi = \omega_0 t$.

Равноускоренное вращательное движение



При равноускоренном вращательном движении скорость тела изменяется по закону $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$, а угол, на который повернулось тело, - $\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$.

Равнозамедленное вращательное движение

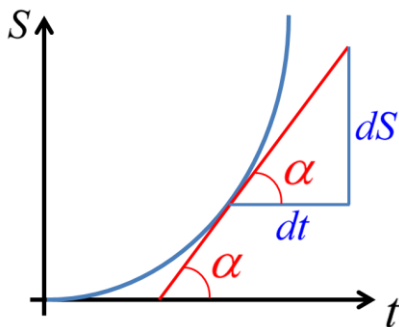


При равнозамедленном вращательном движении скорость тела изменяется по закону $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$, а угол, на который повернулось тело, -

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Анализ графиков

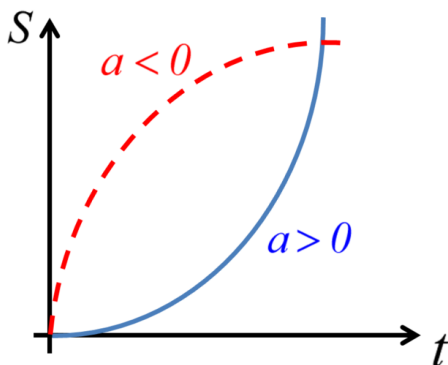
Анализируя график, можно получить дополнительную информацию.



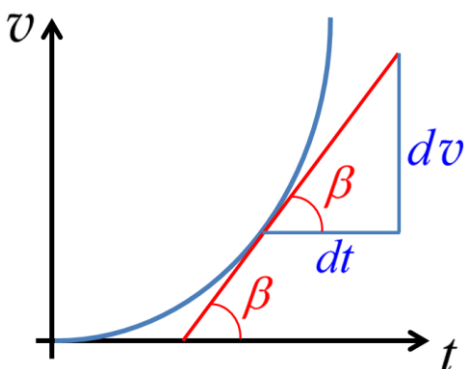
1. Скорость тела v в любой момент времени можно определить по графику пути S , пройденного телом, от времени t .

Тангенс угла наклона касательной к графику зависимости пути, пройденного телом, от времени равен мгновенной скорости тела в данный момент времени, то есть

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ds}{dt} = v.$$



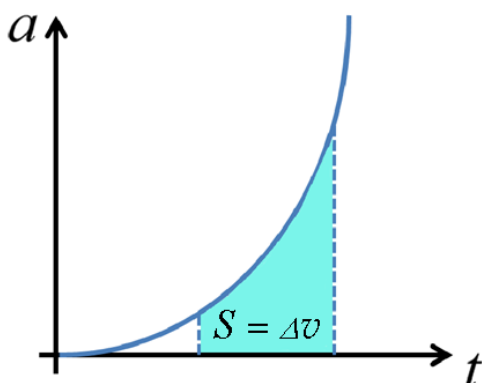
2. По изгибу графика зависимости пути S , пройденного телом, от времени t можно определить, как двигалось тело на данном участке: ускоренно ($a > 0$) или замедленно ($a < 0$).



3. Ускорение тела a в любой момент времени можно определить по графику изменения скорости тела v от времени t .

Тангенс угла наклона касательной к графику зависимости скорости тела от времени равен мгновенному ускорению тела в данный момент времени, то есть

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dv}{dt} = a.$$

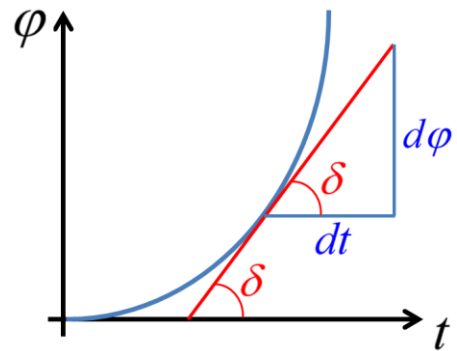


4. По графику ускорения тела a от времени t можно найти изменение скорости тела Δv за какой-либо промежуток времени Δt , как площадь фигуры под кривой этого графика за рассматриваемый промежуток времени.

5. Угловую скорость вращения тела ω в любой момент времени t можно определить по графику угла поворота тела φ от времени.

Тангенс угла наклона касательной к графику зависимости угла поворота тела от времени равен мгновенной угловой скорости тела в данный момент времени, то есть

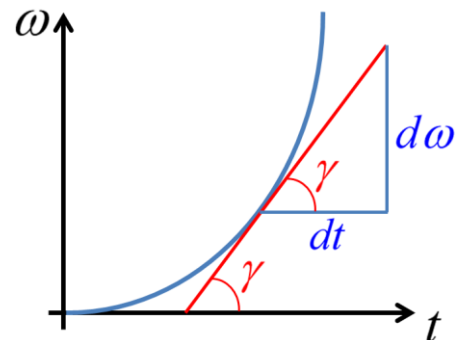
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{d\varphi}{dt} = \omega.$$



6. Угловое ускорение тела ε в любой момент времени t можно определить по графику угловой скорости. Чем круче график угловой скорости, тем больше мгновенное ускорение.

Тангенс угла наклона касательной к графику зависимости угловой скорости тела от времени равен мгновенному угловому ускорению тела в данный момент времени, то есть

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon.$$

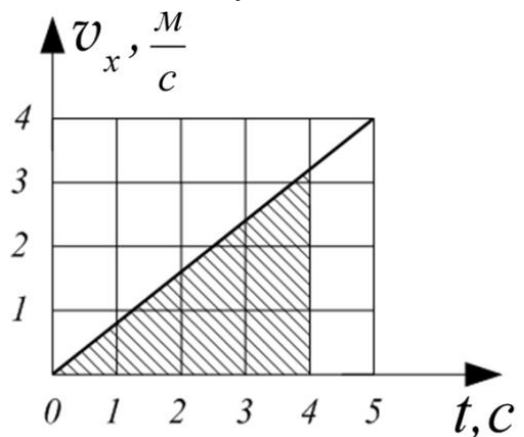


Геометрический смысл пути

Иногда, при решении задач на нахождение пройденного точкой пути, удобно пользоваться понятием геометрического смысла пути:

Путь, пройденный телом, равен площади фигуры под кривой графика зависимости скорости тела v от времени t .

На представленном рисунке, путь, пройденный телом за 4с, равен площади заштрихованного треугольника.



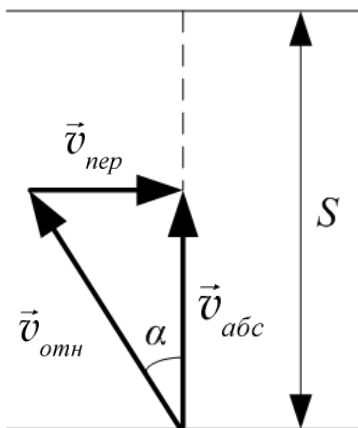
Аналогично, по графику зависимости угловой скорости тела ω от времени t , можно определить угол φ , на который повернулось тело при вращательном движении.

Сложное движение

Сложным называется движение тела, рассматриваемое одновременно относительно двух систем координат, одну из которых условно принимают за «неподвижную», а другую за «подвижную».

Например, человек идёт по движущемуся вагону или переплывает реку.

Если тело участвует в сложном движении, то скорость тела определяется по следующему правилу:



вектор скорости тела относительно неподвижной системы координат $\vec{v}_{абс}$ равен векторной сумме скорости подвижной системы координат относительно неподвижной $\vec{v}_{пер}$ и скорости тела $\vec{v}_{отн}$ относительно подвижной системы координат

$$\vec{v}_{абс} = \vec{v}_{пер} + \vec{v}_{отн},$$

где

скорость тела относительно неподвижной системы координат называется **абсолютной скоростью** $\vec{v}_{абс}$;

скорость подвижной системы координат относительно неподвижной называется **переносной скоростью** $\vec{v}_{пер}$;

скорость тела относительно подвижной системы координат называется **относительной скоростью** $\vec{v}_{отн}$.

Например,

- если поезд движется со скоростью 16 м/с относительно вокзала, а пассажир по ходу поезда бежит со скоростью 2 м/с относительно вагона, то скорость пассажира относительно вокзала будет равна $16 \text{ м/с} + 2 \text{ м/с} = 18 \text{ м/с}$. Если же пассажир будет бежать относительно вагона в сторону, противоположную движению поезда, то его скорость относительно вокзала будет $16 \text{ м/с} - 2 \text{ м/с} = 14 \text{ м/с}$;

- если же тела движутся перпендикулярно или под углом друг к другу, то для графического решения подобных задач обычно применяются теорема Пифагора или теорема косинусов.

Относительное движение

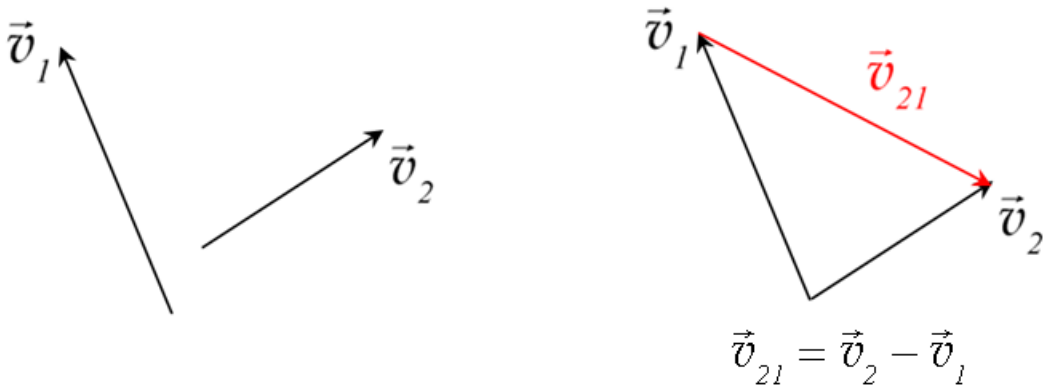
Относительным называется движение тела, рассматриваемое относительно неподвижной системы координат.

Если в задаче рассматривается движение двух независимых друг от друга тел, движущихся в одной и той же системе координат (например, движение встречных поездов и т.д.), то скорость одного тела относительно другого определяются по следующему правилу:

вектор относительной скорости двух тел $\vec{v}_{21}$ равен векторной разности их абсолютных скоростей:

$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ - скорость второго тела относительно первого,

$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ - скорость первого тела относительно второго.

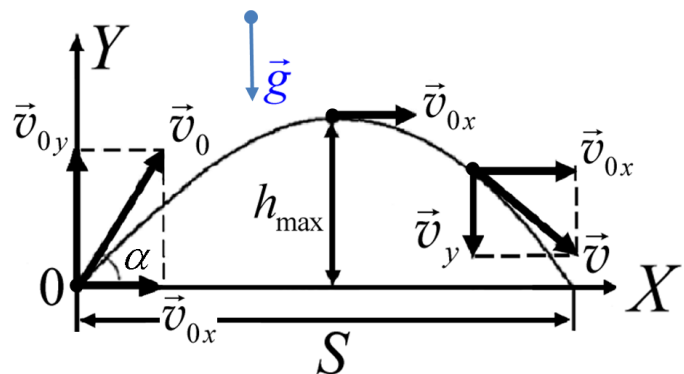
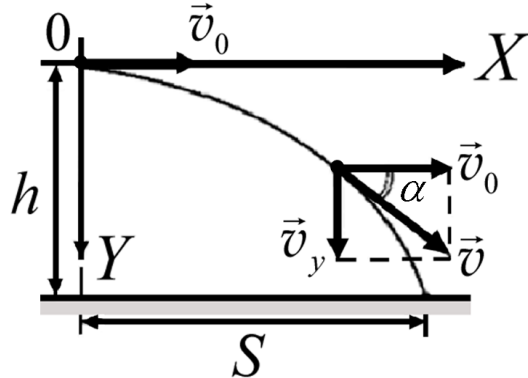


Таким образом, при движении тел навстречу друг другу их относительная скорость равна сумме их скоростей относительно Земли, а при движении тел в одном направлении их относительная скорость равна разности их скоростей относительно Земли.

Используя понятие относительной скорости, решение задачи, где рассматривается движение двух тел относительно друг друга, можно упростить, если одно тело принять за неподвижное, а другое движущимся относительно первого со скоростью, равной их относительной скорости.

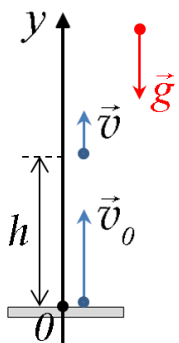
Свободное падение тел

Свободным падением тела называется движение тела под действием только силы тяжести (то есть сопротивление воздуха не учитывается).



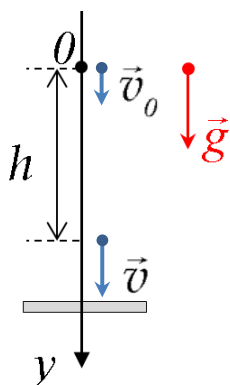
При свободном падении все тела движутся с **ускорением свободного падения** $\vec{g}$, которое вблизи поверхности Земли равно $g = 9.81 \frac{м}{с^2}$. При этом тело движется в одной плоскости, траекторией движения тела, брошенного под углом к горизонту, является **парабола**, а координаты тела и проекция скорости тела изменяются по законам:

$$\begin{cases} x = \pm x_0 \pm v_{ox} t \pm \frac{g_x t^2}{2} \\ y = \pm y_0 \pm v_{oy} t \pm \frac{g_y t^2}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} v_x = \pm v_{ox} \pm g_x t \\ v_y = \pm v_{oy} \pm g_y t \end{cases}.$$



Если тело бросают вертикально вверх, то путь h , пройденный телом, и его скорость v в любой момент времени движения вверх можно определить по формулам

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad \text{и} \quad v = v_0 - gt.$$



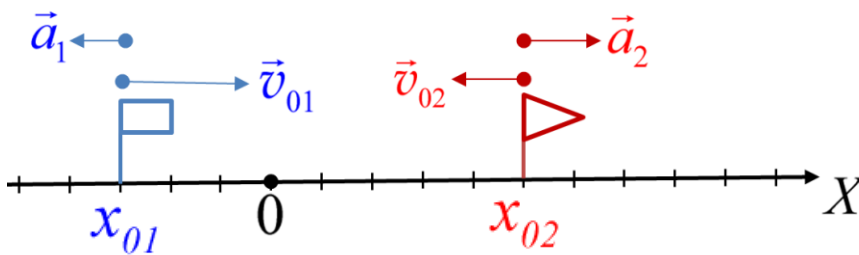
Если тело бросают вертикально вниз, то путь h , пройденный телом, и его скорость v в любой момент времени движения вниз можно определить по формулам

$$h = v_0 t + \frac{gt^2}{2} \quad \text{и} \quad v = v_0 + gt.$$

В разделе «Кинематика» встречаются задачи на следующие темы:

1. на составление уравнений поступательного движения;
2. на составление уравнений вращательного движения;
3. на определение средней скорости;
4. по кинематике сложного движения;
5. по кинематике относительного движения.

поступательное движение



вращательное движение

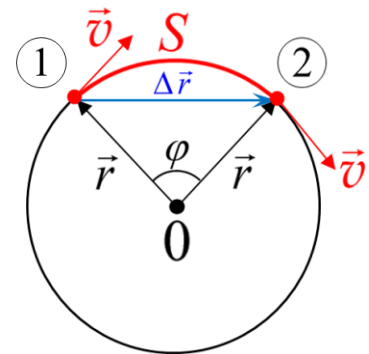


Схема решения задач по кинематике поступательного движения абсолютно твёрдого тела

1. Сделайте рисунок к задаче для начального момента времени $t = 0$ с, на котором изобразите начальные координаты тел x_0 , y_0 и направления векторов их начальных скоростей $\vec{v}_0$ и ускорений $\vec{a}$ (начало координат обычно помещают в начальной точке движения тела или одного из тел. При выборе направлений координатных осей следует учитывать направление векторов перемещений, скоростей и ускорений тел).
2. Затем сделайте аналогичные рисунки для характерных моментов времени t , о которых есть информация в условии задачи.
3. Запишите уравнения движения для каждого тела в проекциях на оси координат, сначала, в общем виде по рисунку для начального момента времени $t = 0$ с, а затем, по рисункам для характерных моментов времени t , о которых есть информация в условии задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \pm x_0 \pm v_{ox} t \pm \frac{a_x t^2}{2} \\ y = \pm y_0 \pm v_{oy} t \pm \frac{a_y t^2}{2} \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = \pm v_{ox} \pm a_x t \\ v_y = \pm v_{oy} \pm a_y t \end{array} \right., \quad (1)$$

где x_0 - начальная координата тела по оси ОХ;

v_{0x} и a_x - проекции начальной скорости и ускорения тела по оси ОХ;

y_0 - начальная координата тела по оси ОУ;

v_{0y} и a_y - проекции начальной скорости и ускорения тела на ось ОУ.

При записи уравнений системы (1) необходимо помнить, что если вектор скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$ направлены в положительном направлении оси, то их проекции в уравнениях (1) имеют знак плюс, если же они направлены в противоположную сторону оси, то их проекции имеют знак минус.

При необходимости систему уравнений (1) можно дополнить следующими уравнениями связи:

$$v^2 - v_0^2 = 2aS, \text{ если движение тела равноускоренное,}$$

$$v^2 - v_0^2 = -2aS, \text{ если движение тела равнозамедленное,}$$

где v_0 - начальная скорость тела, v - конечная скорость тела,

a - ускорение тела, S - пройденный телом путь.

4. Решите полученную систему уравнений и найдите решение задачи в общем, то есть в буквенном виде.

5. Проверьте размерность полученного равенства. Если размерность совпадает, то подставьте в окончательное уравнение числовые значения и проведите расчёты.

При решении задач по кинематике поступательного движения, рекомендуется применять именно вышеуказанную схему решения задач. В наиболее простых случаях, когда необходимо определить скорость v или путь S , пройденный телом за какой-либо промежуток времени t , можно применять следующие уравнения:

- при равномерном движении: $v = \text{const}$ и $S = vt$;

- при равноускоренном движении: $v = v_0 + at$ и $S = v_0t + \frac{at^2}{2}$;

- при равнозамедленном движении: $v = v_0 - at$ и $S = v_0t - \frac{at^2}{2}$.

Внимательно читайте условие задачи:

- если сказано, что тело покоится или начинает двигаться, то его начальная скорость равна нулю, то есть $v_0 = 0 \frac{м}{с}$;

- если сказано, что тело движется равномерно и прямолинейно, то его ускорение равно нулю, то есть $\vec{a} = 0 \frac{м}{с^2}$;

- если сказано, что тело находится в свободном падении, то оно движется с ускорением свободного падения $g = 9.81 \frac{м}{с^2}$.

Причём,

- если тело движется вверх, то движение замедленное, а если вниз, то движение ускоренное;

- если тело бросили вертикально вверх или вертикально вниз, то траекторией движения тела будет прямая линия;

- если тело бросили под углом к горизонту, то траекторией движения тела будет парабола;

- если брошенное вверх тело достигло максимальной высоты h_{max} , следовательно, его скорость в этот момент времени равна нулю $v = 0$;

- если брошенное под углом к горизонту тело достигло максимальной высоты, следовательно, его вертикальная составляющая скорости в этот момент времени равна нулю $v_y = 0$ и мгновенная скорость тела $\vec{v}$ направлена горизонтально.

Опыты Галилео Галилея с падающими телами

Галилей впервые выяснил, что лёгкие предметы падают так же быстро, как и тяжёлые.

Чтобы проверить своё предположение, он сбрасывал с Пизанской башни в один и тот же момент времени пушечное ядро и мушкетную пулю.

Оба тела имели примерно одинаковую форму и достигали Земли одновременно.

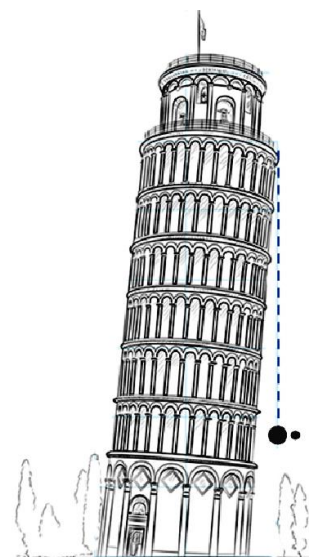


Схема решения задач по кинематике движения материальной точки по окружности или вращательного движения абсолютно твёрдого тела

1. Сделайте рисунок к задаче, на котором укажите начальное положение материальной точки и направление её векторов скорости и ускорения.
2. Затем сделайте аналогичные рисунки для характерных моментов времени, о которых есть информация в условии задачи.
3. Запишите уравнения вращательного движения

$$\begin{cases} \varphi = \pm \varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} \\ \omega = \pm \omega_0 \pm \varepsilon t \end{cases} \quad (1)$$

сначала, в общем виде, по рисунку для начального момента времени $t = 0$ с, а затем, по рисункам для характерных моментов времени, о которых есть информация в условии задачи.

При необходимости систему уравнений (1) можно дополнить следующими уравнениями связи:

$$\begin{aligned} \omega^2 - \omega_0^2 &= 2\varepsilon\varphi, \text{ если движение равноускоренное,} \\ \omega^2 - \omega_0^2 &= -2\varepsilon\varphi, \text{ если движение равнозамедленное,} \end{aligned}$$

где ω_0 - начальная угловая скорость материальной точки;

ω - конечная угловая скорость материальной точки;

ε - угловое ускорение тела;

φ - угол поворота радиус-вектора точки за указанное время.

4. При необходимости, запишите уравнения связи между угловыми и линейными величинами, характеризующими кинематику материальной точки:

$$S = \varphi r; \quad v = \omega r; \quad a_{\text{uc}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega v; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n.$$

5. Решите полученную систему уравнений и найдите решение задачи в общем виде (то есть в буквенном виде).
6. Проверьте размерность полученного равенства. Если она совпадает, то подставьте в окончательное уравнение числовые значения, предварительно переведя их в одну и ту же систему единиц.

Примеры решения задач по кинематике

Рассмотрим сначала задачи на применение формул-определений.

Задача 1. Уравнение движения материальной точки вдоль оси ОХ имеет вид $x = (4 + 2t - t^3) \text{ м}$.

Для моментов времени $t_0 = 0 \text{ с}$ и $t_1 = 3 \text{ с}$ определите:

- 1) координаты x_0 и x_1 точки, 2) мгновенную скорость v_0 и v_1 ,
- 3) мгновенное ускорение a_0 и a_1 , 4) путь, пройденный точкой за время t_1 .

Ответ:

$$x_0 = 4 \text{ м}; x_1 = -19 \text{ м}; v_0 = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}}; v_1 = -25 \frac{\text{м}}{\text{с}}; a_0 = 0 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; a_1 = -18 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}; S_1 = 25 \text{ м}$$

Дано:

$$t_0 = 0 \text{ с}$$

$$t_1 = 3 \text{ с}$$

$$x = (4 + 2t - t^3) \text{ м}$$

$$x_0 - ? \quad x_1 - ?$$

$$v_0 - ? \quad v_1 - ?$$

$$a_0 - ? \quad a_1 - ?$$

$$S_1 - ?$$

Анализ задачи

Для решения данной задачи достаточно вспомнить определения искомых величин, а именно, что такое мгновенная скорость, мгновенное ускорение и путь. Такие задачи решаются наиболее просто.

Решение

Координаты точки x_0 и x_1 в начальный момент времени $t_0 = 0 \text{ с}$ и момент времени $t_1 = 3 \text{ с}$ найдём, подставив в уравнение движения $x = A + 2Bt + Ct^3$ вместо произвольного момента времени t заданные значения времени t_0 и t_1 :

$$x_0 = (4 + 2t_0 - t_0^3) \text{ м} = (4 + 2 \cdot 0 - 0^3) \text{ м} = 4 \text{ м}, \quad (1.1)$$

$$x_1 = (4 + 2t_1 - t_1^3) \text{ м} = (4 + 2 \cdot 3 - 3^3) \text{ м} = -19 \text{ м}. \quad (1.2)$$

Теперь найдём скорость точки в эти моменты времени. Мгновенная скорость, по определению, равна первой производной координаты точки по времени, то есть

$$v = \frac{dx}{dt} = (4 + 2t - t^3)'_t = (2 - 3t^2) \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad (1.3)$$

тогда

$$v_0 = (2 - 3t_0^2) \frac{M}{c} = (2 - 3 \cdot 0^2) \frac{M}{c} = 2 \frac{M}{c}, \quad (1.4)$$

$$v_1 = (2 - 3t_1^2) \frac{M}{c} = (2 - 3 \cdot 3^2) \frac{M}{c} = -25 \frac{M}{c}. \quad (1.5)$$

Знак минус в уравнении (5) указывает на то, что в момент времени t_1 вектор скорости точки был направлен против координатной оси ОХ (то есть точка двигалась в отрицательном направлении оси ОХ).

Теперь найдём ускорение точки. Мгновенное ускорение, по определению, равно первой производной мгновенной скорости точки по времени, то есть

$$a = \frac{dv}{dt} = (2 - 3t^2)'_t = -6t \frac{M}{c^2}. \quad (1.6)$$

Из уравнения (1.6) видно, что движение точки не равнопеременное (ускорение зависит от времени).

Найдём ускорение в моменты времени t_0 и t_1 :

$$a_0 = -6t_0 = -6 \cdot 0c = 0 \frac{M}{c^2}, \quad (1.7)$$

$$a_1 = -6t_1 = -6 \cdot 3c = -18 \frac{M}{c^2}. \quad (1.8)$$

Знак минус в уравнении (1.8) указывает на то, что направление вектора ускорения точки совпадает с отрицательным направлением координатной оси ОХ, причем в условиях данной задачи это имеет место для любого момента времени.

Заметим так же, что в этот момент времени вектор скорости точки тоже направлен против оси ОХ, то есть точка двигалась в это время ускоренно.

Теперь найдём путь, пройденный точкой за время t_1 .

По определению, **путь** – это длина траектории, по которой двигалась материальная точка за рассматриваемый промежуток времени.

А **траектория** – это линия, по которой двигалась материальная точка.

Прежде чем определить путь, пройденный точкой за время t_1 , заметим, что в начальный момент времени координата точки была равна $x_0 = 4\text{м}$, а в момент t_1 стала равна $x_1 = -19\text{м}$.

Это говорит о том, что точка сначала двигалась вдоль оси Ox , затем в какой-то момент времени $t_{ост}$ остановилась на мгновение и начала двигаться в обратном направлении.

Найдём координату остановки точки $x_{ост}$.

Момент остановки точки $t_{ост}$ найдём из уравнения (1.3) из условия, что в этот момент мгновенная скорость точки равна нулю:

$$0 = \left(2 - 3t_{ост}^2\right) \frac{M}{c} \Rightarrow 3t_{ост}^2 = 2 \Rightarrow t_{ост} = \sqrt{\frac{2}{3}} c \approx 0,82c.$$

Тогда координата остановки точки $x_{ост}$ равна

$$x_{ост} = \left(4 + 2t_{ост} - t_{ост}^3\right) M = \left(4 + 2 \cdot 0,82 - 0,82^3\right) M = 5M.$$

Теперь делаем рисунки для моментов времени t_0 , $t_{ост}$ и t_1 .

$t = 0 c$

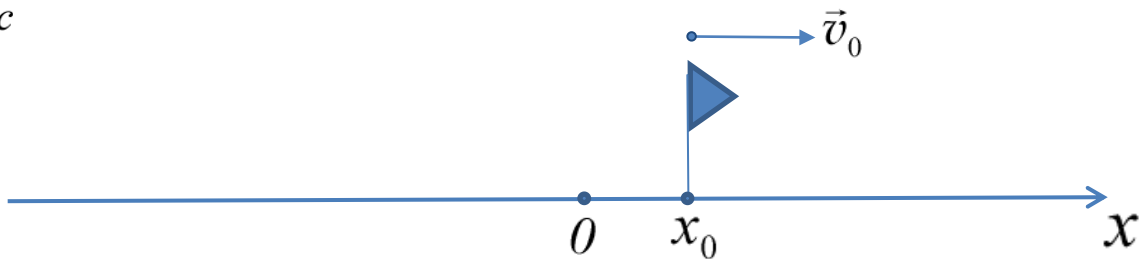


Рис. 1.1

$t = t_{ост}$

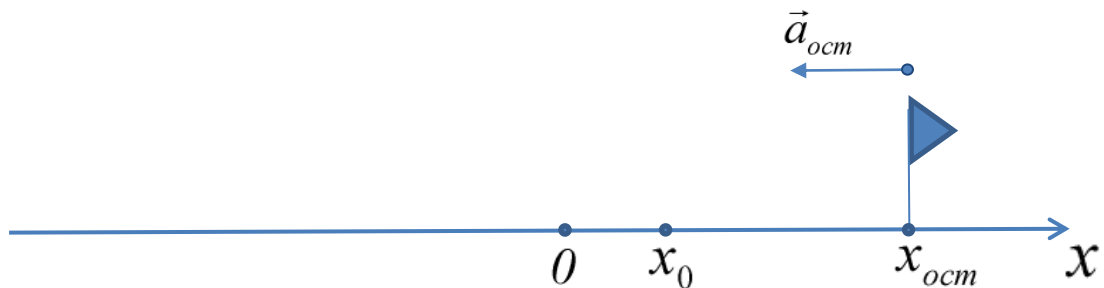


Рис. 1.2

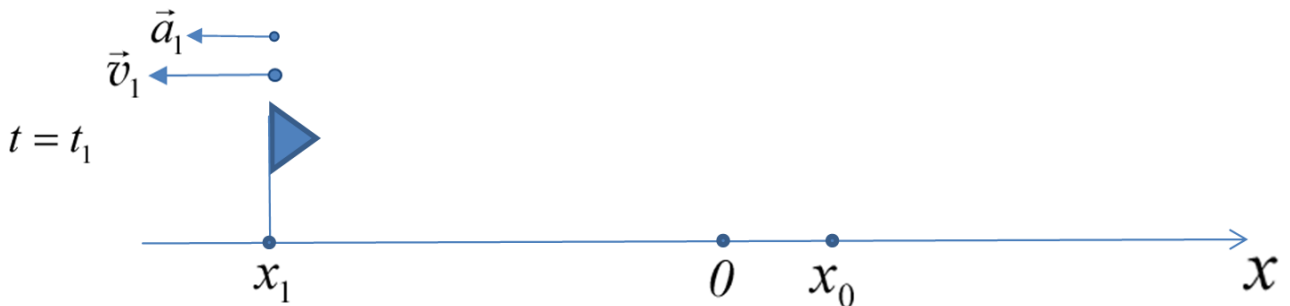


Рис. 1.3

На рис. 1.4 пунктирной линией показан путь точки за время t_1 .

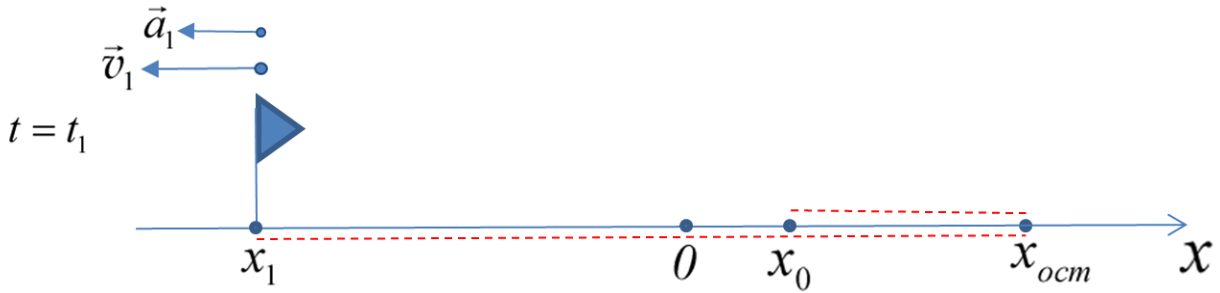


Рис. 1.4

Из рис. 1.4 следует, что путь S_1 равен

$$S_1 = (x_{ост} - x_0) + (x_{ост} + |x_1|) = (5м - 4м) + (5м + 19м) = 25м.$$

Ответ: $x_0 = 4м$; $x_1 = -19м$; $v_0 = 2 \frac{м}{с}$; $v_1 = -25 \frac{м}{с}$;

$$a_0 = 0 \frac{м}{с^2}; a_1 = -18 \frac{м}{с^2}; S_1 = 25м$$

Задача 2. Отряд пионеров прошёл 300 м на север, а потом повернул на восток и прошёл ещё 0,4 км. Определите во сколько раз средняя путевая скорость пионеров больше средней скорости перемещения за рассматриваемый промежуток времени.

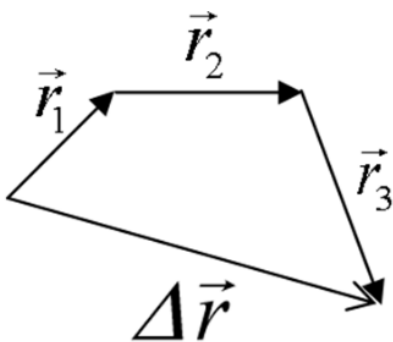
Ответ: $k = 1,4$

Анализ задачи

Дано:
 $S_1 = 300 м$
 $S_2 = 400 м$

$$k = \frac{\langle v \rangle}{|\langle \vec{v} \rangle|} - ?$$

Для решения этой задачи достаточно применить формулы-определения средней путевой $\langle v \rangle$ и средней скорости перемещения $\langle \vec{v} \rangle$. Для этого вспомним, что это такое.



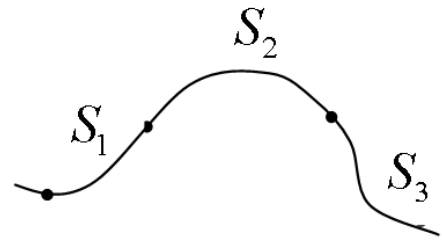
Средней скоростью $\langle \vec{v} \rangle$ (или **средней скоростью перемещения**) называется векторная величина, равная отношению перемещения тела $\Delta \vec{r}$ за какой-либо промежуток времени Δt , к величине этого промежутка времени:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}.$$

Средней путевой скоростью $\langle v \rangle$

называется скалярная величина, равная отношению пути S , пройденного телом за какой-либо промежуток времени t , к величине этого промежутка времени:

$$\langle v \rangle = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{t_1 + t_2 + \dots + t_n}.$$



Определив величины этих скоростей, мы решим задачу.

Решение

По условию задачи необходимо найти следующую величину

$$k = \frac{\langle v \rangle}{|\langle \vec{v} \rangle|}, \quad (2.1)$$

где $\langle v \rangle$ и $|\langle \vec{v} \rangle|$ - это средняя путевая скорость и модуль средней скорости перемещения за всё время движения отряда.

Определим сначала модуль средней скорости перемещения $|\langle \vec{v} \rangle|$.

По условию нашей задачи $|\langle \vec{v} \rangle| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{|\vec{r}_1 + \vec{r}_2|}{t_1 + t_2}, \quad (2.2)$

где $|\Delta \vec{r}| = |\vec{r}_1 + \vec{r}_2|$ - модуль общего перемещения отряда за всё время движения;

$\Delta t = t_1 + t_2$ - общее время движения пионеров.

Напомним, что **перемещением** $\Delta \vec{r}$ называется вектор, проведённый из начального положения материальной точки в её конечное положение.

Поэтому для нахождения модуля перемещения $|\Delta \vec{r}|$ необходимо сделать рисунок по условию задачи. При этом следует учесть, что первый участок движения пионеры шли строго на север, а второй участок шли строго на восток (см. рис 2.1).

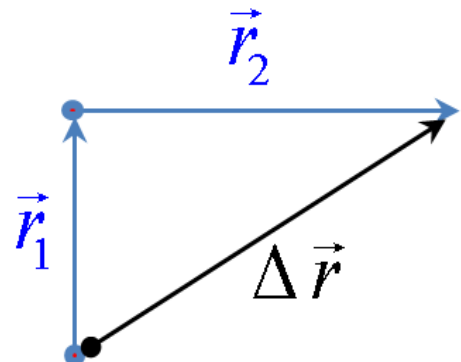


Рис.2.1

Из него по теореме Пифагора следует, что общее перемещение отряда равно

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}. \quad (2.3)$$

Таким образом, подставив (2.3) в (2.2), получим

$$|\langle \vec{v} \rangle| = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{t_1 + t_2}. \quad (2.4)$$

Теперь найдём среднюю путевую скорость $\langle v \rangle$. По условию нашей

$$\text{задачи} \quad \langle v \rangle = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2}, \quad (2.5)$$

где $S = S_1 + S_2$ - общий путь, пройденный отрядом за всё время движения; $t = t_1 + t_2$ - общее время движения пионеров.

Подставив уравнения (2.4) и (2.5) в (2.1), получим

$$k = \frac{\langle v \rangle}{|\langle \vec{v} \rangle|} = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} \cdot \frac{t_1 + t_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} = \frac{S_1 + S_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}. \quad (2.6)$$

Теперь осталось подставить в уравнение (2.6) значения перемещений r_1 , r_2 и пройденного пионерами отрезков пути S_1 и S_2 .

Напомним, что **путем** S называется скалярная величина, равная длине траектории, по которой двигалось тело.

По условию нашей задачи отряд пионеров первый участок пути двигался строго на север и прошёл 300 м, то есть $S_1 = 300 \text{ м}$, а второй участок пути отряд перемещался строго на восток и прошёл ещё 400 м, то есть $S_2 = 400 \text{ м}$.

Так как по условию задачи траекториями первого и второго участков движения пионеров являются прямые линии, то модули перемещения r_1 и r_2 будут равны участкам пути S_1 и S_2 , то есть

$$|\vec{r}_1| = S_1 \quad \text{и} \quad |\vec{r}_2| = S_2.$$

Тогда уравнение (2.6) можно переписать в виде

$$k = \frac{\langle v \rangle}{|\langle \vec{v} \rangle|} = \frac{S_1 + S_2}{\sqrt{S_1^2 + S_2^2}}. \quad (2.7)$$

Подставив в уравнение (2.7) данные в условии задачи величины, окончательно получим $k = \frac{\langle v \rangle}{|\langle \vec{v} \rangle|} = \frac{300 \text{ м} + 400 \text{ м}}{\sqrt{(300 \text{ м})^2 + (400 \text{ м})^2}} = \frac{700 \text{ м}}{500 \text{ м}} = 1,4$.

Ответ: $k = \frac{\langle v \rangle}{|\langle \vec{v} \rangle|} = 1,4$

Задача 3. Автомобили движутся по двум прямолинейным трассам, расположенным под углом 60° друг к другу. Скорость первого автомобиля $v_1 = 36 \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а второго - $v_2 = 2000 \frac{\text{см}}{\text{с}}$.

Определите скорости, с которыми автомобили могут двигаться относительно друг друга по условию данной задачи.

Ответ: $|\vec{v}_{21}|_1 = 17,3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $|\vec{v}_{21}|_2 = 26,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Дано:

$$v_1 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$v_2 = 20 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$|\vec{v}_{21}|_1 - ?$$

$$|\vec{v}_{21}|_2 - ?$$

Анализ задачи

Для решения задачи применим формулу-определение относительной скорости двух тел:

Вектор относительной скорости двух тел $\vec{v}_{21}$ равен векторной разности их абсолютных скоростей:

$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ - скорость второго тела относительно первого,

$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ - скорость первого тела относительно второго.

В задаче речь идёт не об одной скорости, с которыми автомобили могут двигаться относительно друг друга, а о нескольких скоростях в связи с тем, что возможны разные случаи, например,

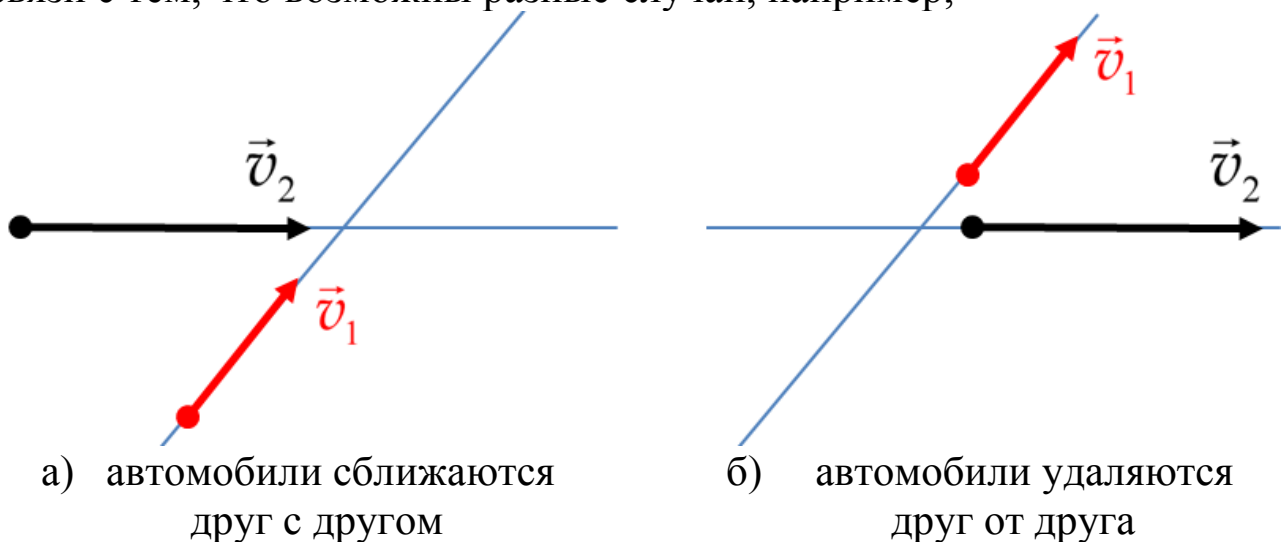


Рис.3.1

или

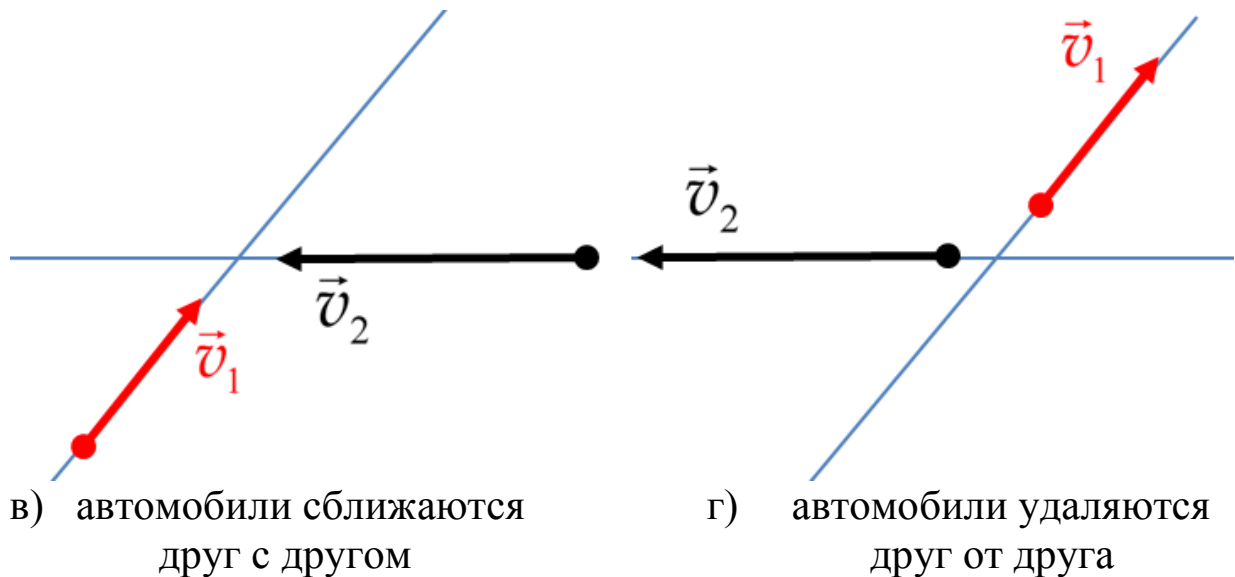


Рис.3.2

Следует заметить, что модуль скорости второго автомобиля относительно первого $|\vec{v}_{21}|$ и модуль скорости первого автомобиля относительно второго $|\vec{v}_{12}|$ будут равны между собой, то есть

$$|\vec{v}_{21}| = |\vec{v}_{12}|.$$

Поэтому в данной задаче не важно, какую скорость будем определять.

Найдём, к примеру, скорость второго автомобиля относительно первого

$$\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad (3.1)$$

Решим векторное уравнение (3.1) геометрическим способом.

При этом учтём, что случаи а) и б), представленные на рис.3.1, и случаи в) и г), представленные на рис.3.2, идентичны между собой.

Итак, делаем два рисунка для случаев а) и б), а так же для случаев в) и г) (смотри рис.3.3).

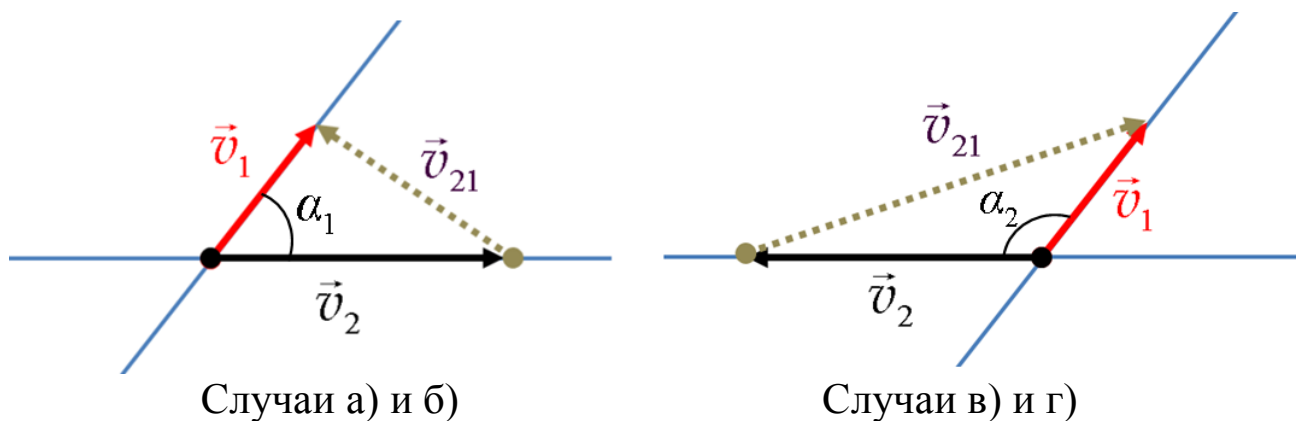


Рис.3.3

Из рис.3.3 по теореме косинусов для каждого случая имеем

$$|\vec{v}_{21}|_1 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha_1},$$

$$|\vec{v}_{21}|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha_2}.$$

Из условия задачи следует, что $\alpha_1 = \alpha = 60^\circ$ и $\alpha_2 = 180 - \alpha = 120^\circ$.

Тогда

$$|\vec{v}_{21}|_1 = \sqrt{\left(10\frac{м}{с}\right)^2 + \left(20\frac{м}{с}\right)^2 - 2 \cdot 10\frac{м}{с} \cdot 20\frac{м}{с} \cos 60^\circ} = 17,3\frac{м}{с},$$

$$|\vec{v}_{21}|_2 = \sqrt{\left(10\frac{м}{с}\right)^2 + \left(20\frac{м}{с}\right)^2 - 2 \cdot 10\frac{м}{с} \cdot 20\frac{м}{с} \cos 120^\circ} = 26,5\frac{м}{с}.$$

Ответ: $|\vec{v}_{21}|_1 = 17,3\frac{м}{с}; |\vec{v}_{21}|_2 = 26,5\frac{м}{с}.$

Задача 4. Диск радиусом $r = 20\text{ см}$ вращается согласно уравнению $\varphi = (3 - t + 0,1t^3)\text{ рад}$. Определите угловую скорость ω_1 , угловое ε , тангенциальное $a_{\tau 1}$, нормальное a_{n1} и полное ускорение точки a_1 , находящейся на краю диска, в конце двадцатой секунды его вращения.

Ответ: $\omega_1 = 1\frac{\text{рад}}{с}; \varepsilon = 0,1\frac{\text{рад}}{с^2}; a_{\tau 1} = 0,02\frac{м}{с^2}; a_{n1} = 0,2\frac{м}{с^2}; a_1 \approx 0,2\frac{м}{с^2}$

Дано:

$$r = 0,2\text{ м}$$

$$t_1 = 20\text{ с}$$

$$\varphi = (3 - t + 0,1t^3)\text{ рад}$$

$$\omega_1 - ? \quad \varepsilon - ? \quad a_{\tau} - ?$$

$$a_n - ? \quad a - ?$$

Анализ задачи

Из условия задачи следует, что нам необходимо найти мгновенное значение угловой скорости ω и углового ускорения ε .

Поэтому применим формулы - определения для этих величин.

Решение

По определению, **мгновенная угловая скорость** ω – это первая производная угла поворота тела φ по времени t , то есть

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \left(3 - 1t + \frac{0,1t^2}{2} \right)' = (-1 + 0,1t) \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \quad (4.1)$$

А **мгновенное угловое ускорение** ε – это первая производная угловой скорости тела ω по времени t , то есть

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = (-1 + 0,1t)' = 0,1 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}. \quad (4.2)$$

Из соотношения (4.2) видно, что угловое ускорение не зависит от времени, следовательно, это движение с постоянным ускорением

$$\varepsilon = 0,1 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}.$$

Теперь найдём величину угловой скорости диска через $t_1 = 20$ с движения

$$\omega_1 = (-1 + 0,1 \cdot t_1) = (-1 + 0,1 \cdot 20) = -1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Нормальное a_{n1} , тангенциальное $a_{\tau 1}$ и полное a_1 ускорения точки, находящейся на краю диска, найдём по формулам связи

$$\begin{cases} a_n = \omega^2 r \\ a_\tau = \varepsilon r \\ a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \end{cases}.$$

Таким образом,

$$a_{n1} = \omega_1^2 r = \left(1 \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right)^2 \cdot 0,2 \text{ м} = 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$a_{\tau 1} = \varepsilon r = 0,1 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} \cdot 0,2 \text{ м} = 0,02 \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$a_1 = \sqrt{a_{n1}^2 + a_{\tau 1}^2} = \sqrt{\left(0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right)^2 + \left(0,02 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right)^2} \approx 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ответ: $\omega_1 = 1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $a_{n1} = 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_{\tau 1} = 0,02 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $a_1 \approx 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Теперь рассмотрим задачи, в которых необходимо использовать схему решения задач.

Задача 5. Из пункта А с начальной скоростью 200 см/с и постоянным ускорением выезжает первое тело. Через 1/6 мин из того же места выезжает второе тело с начальной скоростью 12 м/с, с тем же постоянным ускорением, что и у первого тела. Найдите величину этого ускорения, если второе тело догнало первое через 50 с после начала его движения.

Ответ: $a \approx 0,87 \frac{м}{с^2}$

Дано:

$$v_{01} = 2 \frac{м}{с}$$

$$v_{02} = 12 \frac{м}{с}$$

$$\Delta t = 10 с$$

$$a_1 = a_2 = a$$

$$t_{\text{встр}} = 50 с$$

$$a = ?$$

Анализ задачи

Решить эту задачу, используя формулу-определение мгновенного ускорения тела нельзя, так как не заданы уравнения движения рассматриваемых в задаче тел.

Для нахождения этих уравнений движения, необходимо применить схему решения задач по кинематике поступательного движения тела.

Схема решения задач по кинематике поступательного движения абсолютно твёрдого тела

1. Сделайте рисунок к задаче для начального момента времени $t = 0с$, на котором изобразите начальные координаты тел x_0 , y_0 и направления векторов их начальных скоростей v_0 и ускорений $\vec{a}$ (начало координат обычно помещают в начальной точке движения тела или одного из тел).
2. Затем сделайте аналогичные рисунки для характерных моментов времени t , о которых есть информация в условии задачи.
3. Запишите уравнения движения для каждого тела в проекциях на оси координат, сначала, в общем виде по рисунку для начального момента времени $t = 0с$, а затем по рисункам для характерных моментов времени t , о которых есть информация в условии задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \pm x_0 \pm v_{ox} t \pm \frac{a_x t^2}{2} \\ y = \pm y_0 \pm v_{oy} t \pm \frac{a_y t^2}{2} \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = \pm v_{ox} \pm a_x t \\ v_y = \pm v_{oy} \pm a_y t \end{array} \right., \quad (1)$$

где x_0 - начальная координата тела по оси OX; v_{0x} и a_x - проекции начальной скорости и ускорения тела на ось OX;

y_0 - начальная координата тела по оси OY; v_{0y} и a_y - проекции начальной скорости и ускорения тела на ось OY.

При необходимости, систему уравнений (1) можно дополнить следующими уравнениями связи:

$$v^2 - v_0^2 = 2aS, \text{ если движение тела равноускоренное,}$$

$$v^2 - v_0^2 = -2aS, \text{ если движение тела равнозамедленное,}$$

где v_0 - начальная скорость тела; v - конечная скорость тела;

a - ускорение тела; S - пройденный телом путь.

4. Решите полученную систему уравнений и найдите решение задачи в общем (то есть в буквенном) виде.

5. Проверьте размерность полученного равенства. Если размерность совпадает, то подставьте в окончательное уравнение числовые значения и проведите расчёты.

Решение

Итак, согласно пунктам 1 и 2 схемы решения задач, делаем рисунки к задаче, на которых отмечаем координаты тел и направления векторов их скоростей и ускорений в начальный момент времени $t = 0$ с (в нашем случае, в качестве начального момента времени $t = 0$ с удобнее выбрать момент, когда выезжает второе тело), а так же, для характерных моментов времени t , о которых есть информация в задаче (то есть для момента встречи $t_{встр}$, когда второе тело догоняет первое).

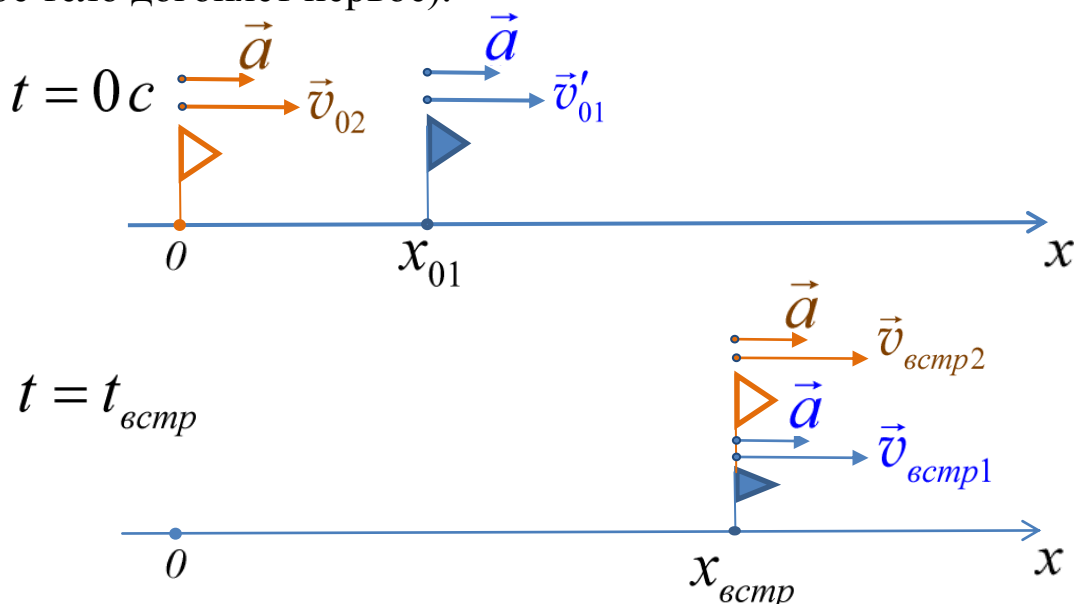


Рис.5.1

Теперь запишем уравнения движения для каждого тела в общем виде согласно рис.5.1 для начального момента времени $t = 0$ с:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_{01} + v'_{01}t + \frac{at^2}{2} \\ v_1 = v'_{01} + at \\ x_2 = v_{02}t + \frac{at^2}{2} \\ v_2 = v_{02} + at \end{array} \right. . \quad (5.1)$$

В системе уравнений (5.1) надо найти начальную координату первого тела x_{01} и его скорость v'_{01} в момент времени $t = 0$ с.

При этом учтём, что первое тело до этого момента уже двигалось некоторое время Δt с ускорением a и начальной скоростью v_{02} .

В этом случае получим, что

$$x_{01} = v_{01}\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2} \quad \text{и} \quad v'_{01} = v_{01} + a\Delta t .$$

Тогда система уравнений (5.1) примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_{01} + v'_{01}t + \frac{at^2}{2} = (v_{01}\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2}) + (v_{01} + a\Delta t)t + \frac{at^2}{2} \\ v_1 = v'_{01} + at = (v_{01} + a\Delta t) + at \\ x_2 = v_{02}t + \frac{at^2}{2} \\ v_2 = v_{02} + at \end{array} \right.$$

Раскроем скобки в первом и втором уравнениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_{01} + v'_{01}t + \frac{at^2}{2} = v_{01}\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2} + v_{01}t + a\Delta t \cdot t + \frac{at^2}{2} \\ v_1 = v'_{01} + at = v_{01} + a\Delta t + at \\ x_2 = v_{02}t + \frac{at^2}{2} \\ v_2 = v_{02} + at \end{array} \right.$$

Сгруппировав подобные члены в первом и втором уравнениях, окончательно получим

$$\begin{cases} x_1 = x_{01} + v'_{01}t + \frac{at^2}{2} = v_{01}(t + \Delta t) + a\Delta t \cdot t + \frac{a(t^2 + \Delta t^2)}{2} \\ v_1 = v'_{01} + at = v_{01} + a\Delta t + at = v_{01} + a(t + \Delta t) \\ x_2 = v_{02}t + \frac{at^2}{2} \\ v_2 = v_{02} + at \end{cases} \quad (5.2)$$

Систему уравнений (5.2) решать ещё нельзя, так как в неё входят текущие координаты x и время t . Поэтому необходимо записать уравнения системы (5.2) для момента встречи $t_{встр}$ согласно рис.5.1:

$$\begin{cases} x_{встр} = v_{01}(t_{встр} + \Delta t) + a\Delta t \cdot t_{встр} + \frac{a(t_{встр}^2 + \Delta t^2)}{2} \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} v_{встр1} = v_{01} + a(t_{встр} + \Delta t) \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} x_{встр} = v_{02}t_{встр} + \frac{at_{встр}^2}{2} \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} v_{встр2} = v_{02} + at_{встр} \end{cases} \quad (5.6)$$

Приравняем уравнения (5.3) и (5.5), так как координаты обоих тел в момент их встречи были равны:

$$\begin{aligned} v_{01}(t_{встр} + \Delta t) + a\Delta t \cdot t_{встр} + \frac{a(t_{встр}^2 + \Delta t^2)}{2} &= v_{02}t_{встр} + \frac{at_{встр}^2}{2}, \Rightarrow, \\ v_{01}t_{встр} + v_{01}\Delta t + a\Delta t \cdot t_{встр} + \frac{at_{встр}^2}{2} + \frac{a\Delta t^2}{2} &= v_{02}t_{встр} + \frac{at_{встр}^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Выразим из уравнения (5.7) искомое ускорение a и окончательно получим

$$a = 2 \frac{(v_{02} - v_{01})t_{встр} - v_{01}\Delta t}{2\Delta t \cdot t_{встр} + \Delta t^2}. \quad (5.8)$$

Прежде чем подставлять числовые данные, проверим размерность уравнения (5.8).

$$[a] = \left[\frac{M}{c^2} \right] = \frac{\left(\frac{M}{c} - \frac{M}{c} \right) c - \frac{M}{c} c}{c \cdot c + c^2} = \frac{\cancel{M} \cancel{c} - \cancel{M} \cancel{c}}{c^2 + c^2} = \frac{M - M}{c^2} = \frac{M}{c^2}.$$

Размерность уравнения (5.8) совпала, поэтому подставим в него числовые значения с размерностями и окончательно получим

$$a = 2 \frac{\left(12 \frac{M}{c} - 2 \frac{M}{c} \right) \cdot 50c - 2 \frac{M}{c} \cdot 10c}{2 \cdot 10c \cdot 50c + (10c)^2} \approx 0,87 \frac{M}{c^2}.$$

Ответ: $a \approx 0,87 \frac{M}{c^2}.$

Задача 6. С поверхности Земли под углом 60 градусов бросают тело с начальной скоростью 0,1 км/с. Определите максимальную высоту подъёма тела над Землёй в процессе его движения и расстояние от точки бросания до точки падения тела на Землю. Сопротивлением воздуха пренебредить.

Ответ: $H = 125\text{ м}; S = 216\text{ м}$

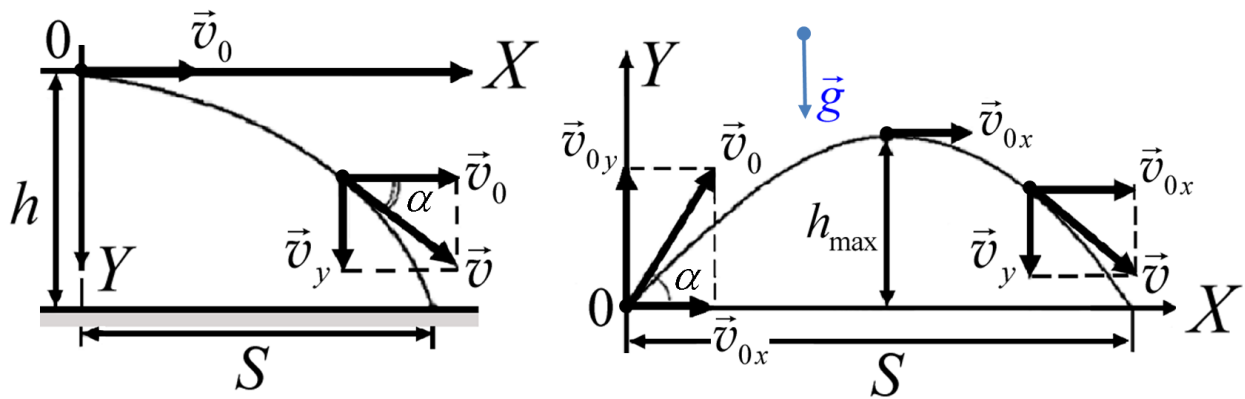
Дано:	
$v_0 = 100 \frac{M}{c}$	
$\alpha = 60^\circ$	
$H - ?$	
$S - ?$	

Анализ задачи

Из анализа задачи следует, что тело будет находиться в свободном падении, так как на него во время полёта будет действовать только сила тяжести (сопротивлением воздуха по условию задачи пренебрегают). То есть тело будет двигаться равнопеременно с ускорением свободного падения $\vec{g}$ по параболе.

Решить эту задачу, используя какие-либо формулы-определения, не получится. Для этого необходимо записать уравнения движения, учитывая, что тело по условию задачи находится в свободном падении. Поэтому применим соответствующую схему решения задач.

Схема решения задач по кинематике свободного падения тела



При свободном падении все тела движутся с **ускорением свободного падения** $\vec{g}$, которое вблизи поверхности Земли равно $g = 9.81 \frac{м}{с^2}$. При этом траекторией движения тела, брошенного под углом к горизонту, является **парабола**.

1. Сделайте рисунок к задаче для начального момента времени $t = 0с$, на котором изобразите начальные координаты тела x_0, y_0 и направления векторов начальной скорости $\vec{v}_0$ и ускорения $\vec{g}$ (начало координат обычно помещают в начальной точке движения тела. Координатную ось ОХ обычно направляют горизонтально, а ось ОУ направляют вертикально).
2. Затем сделайте аналогичные рисунки для характерных моментов времени t , о которых есть информация в условии задачи.
3. Запишите уравнения движения для тела в проекциях на оси координат сначала в общем виде по рисунку для начального момента времени $t = 0с$, а затем, по рисункам для характерных моментов времени t , о которых есть информация в условии задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \pm x_0 \pm v_{ox} t \pm \frac{g_x t^2}{2} \\ y = \pm y_0 \pm v_{oy} t \pm \frac{g_y t^2}{2} \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = \pm v_{ox} \pm g_x t \\ v_y = \pm v_{oy} \pm g_y t \end{array} \right., \quad (1)$$

где x_0 - начальная координата тела по оси ОХ; v_{ox} и g_x - проекции начальной скорости и ускорения тела на ось ОХ;

y_0 - начальная координата тела по оси ОУ; v_{oy} и g_y - проекции начальной скорости и ускорения тела на ось ОУ.

4. Решите полученную систему уравнений и найдите решение задачи в общем (то есть в буквенном) виде.
5. Проверьте размерность полученного равенства. Если размерность совпадает, то подставьте в окончательное уравнение числовые значения и проведите расчёты.

Решение

Итак, согласно пунктам 1 и 2 схемы решения задач, делаем рисунок, на котором отмечаем координаты тела и направления векторов его скорости $\vec{v}_0$ и ускорения $\vec{g}$ в начальный момент времени $t = 0c$, а так же в характерные моменты времени, о которых есть информация в задаче (в нашем случае для момента подъёма тела t_{nod} на максимальную высоту H и момента падения тела на Землю t_n).

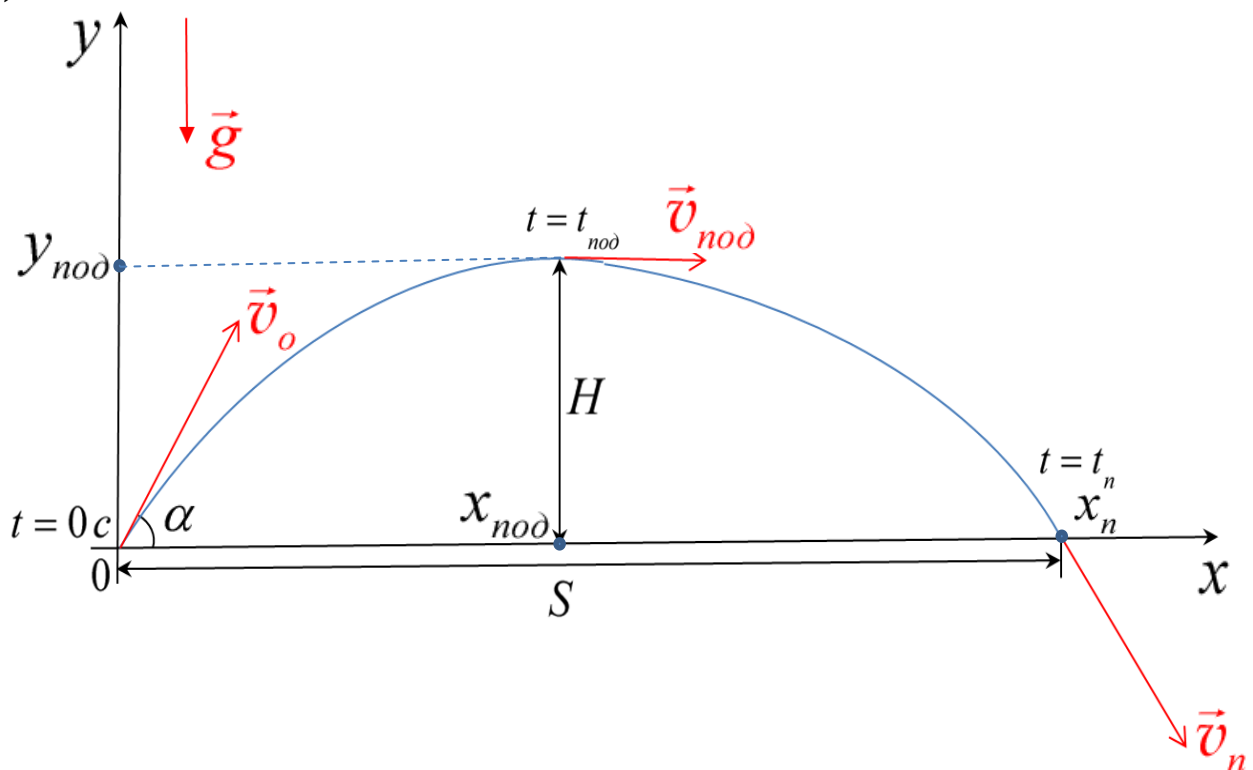


Рис.6.1

Теперь, согласно пункту 3, запишем уравнения движения для тела в проекциях на выбранные нами оси координат сначала в общем виде согласно рис.6.1 для начального момента времени $t = 0c$, а затем для момента подъёма тела t_{nod} на максимальную высоту H и момента падения тела на Землю t_n).

Итак, для момента времени $t = 0c$ имеем

$$\begin{cases} x = v_o \cos \alpha \cdot t \\ v_x = v_o \cos \alpha \\ y = v_o \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} \\ v_y = v_o \sin \alpha - gt \end{cases} \quad (6.1)$$

Система уравнений (6.1) позволяет определить координаты x и y тела и проекции скорости тела v_x и v_y на оси координат в любой момент времени t . Однако сразу решить её нельзя так, как в ней нам ничего не известно. Поэтому запишем уравнения системы (6.1) для момента подъёма тела на максимальную высоту H .

Для этого на рис.6.1 смотрим, какие обозначения мы вводили для этого момента времени t_{nod} и используем их для записи уравнений (6.1):

$$\begin{cases} x_{nod} = v_o \cos \alpha \cdot t_{nod} \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\begin{cases} v_{nod} = v_o \cos \alpha \end{cases} \quad (6.3)$$

$$\begin{cases} H = v_o \sin \alpha \cdot t_{nod} - \frac{gt_{nod}^2}{2} \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\begin{cases} 0 = v_o \sin \alpha - gt_{nod} \end{cases} \quad (6.5)$$

Обратите внимание на уравнение (6.5). На максимальной высоте H скорость тела направлена горизонтально, поэтому её проекция на вертикальную ось OY в этот момент времени равна нулю, то есть $v_{y_{nod}} = 0$.

Максимальную высоту подъёма тела H можно найти из уравнения (6.4), однако там не известно время подъёма тела t_{nod} на эту высоту. Его найдём из уравнения (6.5):

$$\begin{aligned} 0 = v_o \sin \alpha - gt_{nod} &\Rightarrow gt_{nod} = v_o \sin \alpha, \quad \Rightarrow, \\ t_{nod} &= \frac{v_o \sin \alpha}{g}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Подставим (6.6) в уравнение (6.4):

$$H = v_o \sin \alpha \cdot t_{nod} - \frac{gt_{nod}^2}{2} t_{nod} = v_o \sin \alpha \frac{v_o \sin \alpha}{g} - \frac{g}{2} \left(\frac{v_o \sin \alpha}{g} \right)^2,$$

$$\Rightarrow, \quad H = \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{g^2} = \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2g}, \quad \Rightarrow,$$

$$H = \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (6.7)$$

Прежде чем подставлять числовые значения в уравнение (6.7), необходимо проверить его размерность.

$$[H] = [m] = \frac{\left(\frac{m}{c}\right)^2}{\frac{m}{c^2}} = \frac{\frac{m^2}{c^2}}{\frac{m}{c^2}} = \frac{m^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{m} = m.$$

Так как размерность уравнения (6.7) совпала, подставим числовые значения в системе СИ с единицами измерения, получим

$$H = \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{\left(100 \frac{m}{c}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{2 \cdot 10 \frac{m}{c^2}} = 125 m.$$

Далее, для определения максимальной дальности полёта тела S запишем систему уравнений (6.1) для момента падения тела на Землю t_n . Для этого на рис.6.1 смотрим, какие обозначения мы вводили для тела в этот момент времени t_n и используем их для записи уравнений системы (6.1):

$$\begin{cases} S = v_o \cos \alpha \cdot t_n & (6.8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{n_x} = v_o \cos \alpha & (6.9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = v_o \sin \alpha \cdot t_n - \frac{gt_n^2}{2} & (6.10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{n_y} = v_o \sin \alpha - gt_n & (6.11) \end{cases}$$

Обратите внимание на уравнение (6.10). В момент падения тела на Землю, его координата y в нашей системе отсчёта будет равна нулю.

Максимальную дальность полёта тела S можно найти из уравнения (6.8), однако там не известно время полёта тела t_n . Его найдём из уравнения (6.10):

$$0 = v_0 \sin \alpha \cdot t_n - \frac{gt_n^2}{2}, \Rightarrow, \frac{gt_n^2}{2} = v_0 \sin \alpha \cdot t_n, \Rightarrow, \\ t_n = \frac{v_0 \sin \alpha}{2g}. \quad (6.12)$$

Подставим (6.12) в уравнение (6.8):

$$S = v_0 \cos \alpha \cdot t_n = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{2g}. \quad (6.13)$$

Прежде чем подставлять числовые значения в уравнение (6.13), проверим его размерность.

$$[S] = [L] = \frac{\left(\frac{M}{C}\right)^2}{\frac{M}{C^2}} = \frac{\frac{M^2}{C^2}}{\frac{M}{C^2}} = \frac{M^2}{C^2} \cdot \frac{C^2}{M} = M.$$

Так как размерность совпала, подставим числовые значения в системе СИ с единицами измерения, получим

$$S = \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{2g} = \frac{\left(100 \frac{M}{C}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{2}}{2 \cdot 10 \frac{M}{C^2}} = 216 M.$$

Ответ: $H = 125 м; S = 216 м.$

Теперь рассмотрим задачу по кинематике вращательного движения тела.

Задача 7. Минутная стрелка в 3 раза длиннее часовой стрелки. Во сколько раз линейная скорость конца минутной стрелки v_m больше линейной скорости конца часовой стрелки v_c ? **Ответ:** $\frac{v_m}{v_c} = 36$

Дано:

$$R = 3r$$

$$\frac{v_m}{v_c} = ?$$

Анализ задачи

Из условия задачи следует, что концы обеих стрелок часов совершают равномерное движение по окружности, поэтому для ответа на поставленный вопрос применим схему решения задач по кинематике вращательного движения материальной точки по окружности.

Схема решения задач по кинематике вращательного движения материальной точки по окружности

1. Сделайте рисунок к задаче, на котором изобразите начальное положение материальной точки и направление её вектора скорости (а при необходимости и вектора ускорения).
2. Затем сделайте аналогичные рисунки для характерных моментов времени, о которых есть информация в условии задачи.
3. Запишите уравнения вращательного движения сначала, в общем виде, по рисунку для начального момента времени $t = 0$ с:

$$\begin{cases} \varphi = \pm \varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}, \\ \omega = \pm \omega_0 \pm \varepsilon t \end{cases} \quad (1)$$

а затем по рисункам для характерных моментов времени t , о которых есть информация в условии задачи.

4. При необходимости запишите уравнения связи между угловыми и линейными величинами, характеризующими кинематику

материальной точки: $S = \varphi r$; $v = \omega r$; $a_{uc} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega v$;

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n.$$

5. Решите полученную систему уравнений и найдите решение задачи в общем (то есть в буквенном) виде. Проверьте размерность полученного равенства.
6. Подставьте в окончательное уравнение числовые значения, предварительно переведя их в одну и ту же систему единиц.

Решение

Итак, делаем рисунки для начального момента времени $t = 0\text{ с}$ и для другого момента времени, например, 1 час, то есть $t_1 = 1\text{ ч}$.

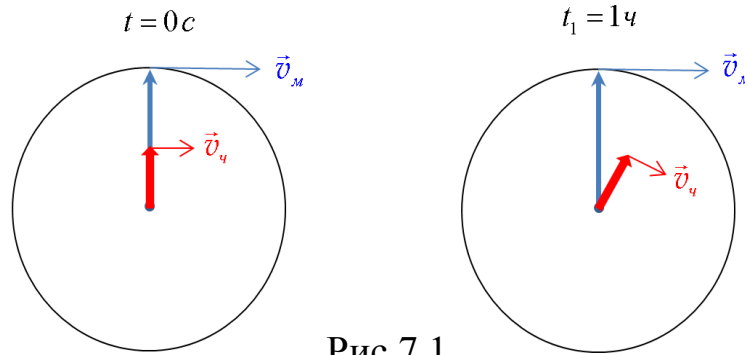


Рис.7.1

Запишем уравнения вращательного движения для точек, расположенных на концах часовой и минутной стрелок в общем виде согласно рисунка для начального момента времени $t = 0\text{ с}$:

$$\begin{cases} \varphi_m = \omega_m t \\ \varphi_q = \omega_q t \\ v_m = \omega_m R \\ v_q = \omega_q r \\ R = 3r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_m = \omega_m t \\ \varphi_q = \omega_q t \\ \omega_m = \frac{v_m}{R} = \frac{v_m}{3r} \\ \omega_q = \frac{v_q}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_m = \frac{v_m}{3r} t \\ \varphi_q = \frac{v_q}{r} t \end{cases}.$$

Теперь запишем полученные уравнения движения для момента времени $t_1 = 1\text{ ч}$, при этом учтём, что минутная стрелка за это время повернулась на угол 2π радиан (сделала полный оборот), а часовая стрелка за это же время повернулась на угол $\frac{\pi}{6}$ радиан:

$$\begin{cases} 2\pi = \frac{v_m}{3r} t_1 \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{6} = \frac{v_q}{r} t_1 \end{cases} \quad (7.2)$$

Разделим (7.1) на (7.2):

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{v_m}{3r} t_1}{\frac{v_q}{r} t_1} \Rightarrow \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{v_m}{3r} t_1}{\frac{v_q}{r} t_1} \Rightarrow 12 = \frac{v_m}{3v_q} \Rightarrow \frac{v_m}{v_q} = 36$$

Ответ: $\frac{v_m}{v_q} = 36$.

Задача 8. Тонкостенный шар радиусом $r = 100$ см вращается с угловой скоростью $\omega = 628$ рад/с относительно оси, проходящей через его центр. С какой минимальной скоростью v_{min} должна лететь пуля, пробивающая по диаметру этот шар, чтобы в шаре было только одно отверстие?

Ответ: $v_{min} = 400 \frac{м}{с}$.

Анализ задачи

Дано:
 $r = 1 м$
 $\omega = 628 \frac{рад}{с}$

Применим схему решения задач по кинематике вращательного движения абсолютно твёрдого тела для шара и по кинематике материальной точки для пробивающей шар пули.

$v_{min} - ?$

Схема решения задач по кинематике вращательного движения абсолютно твёрдого тела

1. Сделайте рисунок к задаче для начального момента времени $t = 0с$, на котором нарисуйте твёрдое тело и укажите направления его начальных векторов угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$.
2. Затем, сделайте аналогичные рисунки для характерных моментов времени t , о которых есть информация в условии задачи.

3. Запишите уравнения вращательного движения $\varphi = \pm \varphi_0 \pm \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$ и

$\omega = \pm \omega_0 \pm \varepsilon t$ сначала в общем виде по рисунку для начального момента времени $t = 0с$, а затем по рисункам для характерных моментов времени t , о которых есть информация в условии задачи.

Эти выражения можно дополнить уравнениями связи:

$$\begin{aligned} \omega^2 - \omega_0^2 &= 2\varepsilon\varphi, \text{ если движение равноускоренное,} \\ \omega^2 - \omega_0^2 &= -2\varepsilon\varphi, \text{ если движение равнозамедленное.} \end{aligned}$$

4. При необходимости запишите дополнительно уравнения связи между угловыми и линейными величинами, характеризующими кинематику вращательного движения:

$$S = \varphi r, \quad v = \omega r, \quad a_{uc} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega v, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n.$$

5. Решите полученную систему уравнений и найдите решение задачи в общем (то есть в буквенном) виде. Проверьте размерность полученного равенства.

6. Подставьте в окончательное уравнение числовые значения, предварительно переведя их в одну и ту же систему единиц.

Решение

Итак, делаем рисунки для начального момента времени $t = 0c$ и момента времени $t = t_1$, когда пуля вылетает из шара.

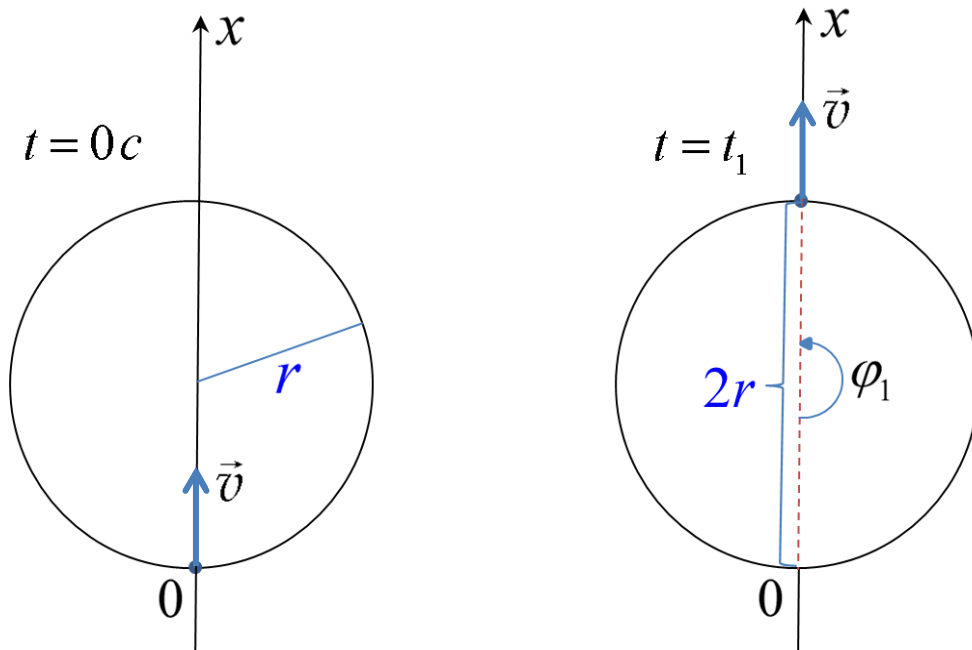


Рис.8.1

Запишем уравнения движения для вращающегося шара и пробивающей его пули в общем виде по рисунку для $t = 0c$:

$$\begin{cases} x = vt \\ \varphi = \omega t \end{cases} \quad (8.1)$$

Здесь мы учли, что пуля внутри шара движется с постоянной скоростью v и шар вращается равномерно с постоянной угловой скоростью ω .

Теперь нам необходимо записать уравнения (8.1) для момента вылета пули из шара $t = t_1$.

Чтобы определить этот момент, нам необходимо проанализировать условие задачи. Требуется найти минимальную скорость пули v_{min} , при которой в шаре будет только одно отверстие.

Это возможно в том случае, если пуля вылетит через то же самое отверстие, которое она пробила.

Если скорость пули будет маленькая $v < v_{min}$, то за время t_1 шар может успеть сделать несколько оборотов, а если скорость пули будет большая $v > v_{min}$, то за время t_1 шар повернётся на небольшой угол и пуля сделает в шаре второе отверстие.

Из анализа сказанного следует, что при $v = v_{min}$ шар успеет сделать только пол оборота, то есть он повернётся на угол $\varphi_1 = \pi$ и пуля за это время пролетит по диаметру шара расстояние $S = 2r$.

Поэтому уравнения (1) примут вид

$$\begin{cases} 2r = v_{min} t_1 \\ \pi = \omega t_1 \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\pi = \omega t_1 \quad (8.3)$$

Разделим $\frac{(8.2)}{(8.3)}$:

$$\frac{2r}{\pi} = \frac{v_{min} t_1}{\omega t_1} \Rightarrow v_{min} = \frac{2r\omega}{\pi}. \quad (8.4)$$

Проверим размерность уравнения (4).

$$[v] = \left[\frac{m}{c} \right] = \frac{m \cdot \frac{rad}{c}}{rad} = \frac{m}{c}.$$

Подставив значения из условия задачи, получим

$$v_{min} = \frac{2 \cdot 1 \text{ м} \cdot 628 \frac{rad}{c}}{3,14 \text{ рад}} = 400 \frac{m}{c}.$$

Ответ: $v_{min} = 400 \frac{m}{c}.$

Графический метод решения задач

Задача 9. График зависимости скорости тела от времени представляет собой полуокружность (см. рис.). Определите путь, пройденный телом за 200 секунд, если максимальная скорость тела на этом участке равна 36 км/ч.

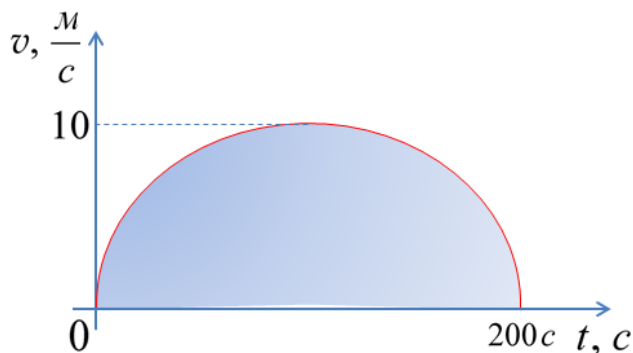
Ответ: $S = 3140 \text{ м}$

Дано:

$$v_{\max} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$t_1 = 200 \text{ с}$$

$$S = ?$$

**Анализ задачи**

Для этой задачи удобнее всего применить графический метод решения. Вспомним геометрический смысл пути:

Путь, пройденный телом, равен площади под кривой графика зависимости скорости тела v от времени t .

Решение

Из нашего рисунка следует, что путь S , пройденный телом за 200 с, будет равен площади заштрихованной фигуры, то есть половине площади

круга
$$S = \frac{S_{\text{круга}}}{2} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi r_1 r_2}{2}, \quad (9.1)$$

одним из радиусов которого является максимальная скорость

$$r_1 = v_{\max} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \text{ а другим – время } r_2 = \frac{t_1}{2} = \frac{200}{2} \text{ с} = 100 \text{ с}.$$

Проверим размерность равенства (9.1):
$$[S] = \frac{\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \text{с}}{1} = \text{м}.$$

Таким образом, путь, пройденный телом, равен

$$S = \frac{\pi r_1 r_2}{2} = \frac{3,14 \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 200 \text{ с}}{2} = 3140 \text{ м}.$$

Ответ: $S = 3140 \text{ м}$

2. ДИНАМИКА

Сила $\vec{F}$

Для описания механического действия одного тела на другое ввели понятие силы.

Силой $\vec{F}$ называется векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело других тел или полей и характеризующая величину и направление этого воздействия.

Масса тела m

Массой тела m называется скалярная величина, характеризующая инертные и гравитационные свойства тела.

Масса тела – **величина аддитивная** (то есть масса тела равна сумме масс всех его частей).

Законы Ньютона

Первый закон Ньютона (закон инерции)

Существуют такие системы отсчёта, относительно которых тело находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела или действие других тел скомпенсировано.

Физический смысл первого закона Ньютона:

1. Он применяется, когда тело движется без ускорения, то есть $\vec{a} = 0$, если $\sum \vec{F}_i = 0$.

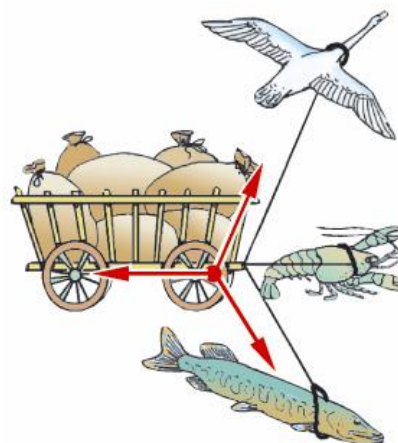
2. Он вводит в рассмотрение понятие инерциальной и неинерциальной системы отсчёта.

Инерциальная система отсчёта - это система отсчёта, движущаяся без ускорения.

Неинерциальная система отсчёта - это система отсчёта, движущаяся с ускорением.

Следует отметить, что первый закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчёта.

Любая система отсчёта, движущаяся относительно инерциальной равномерно и прямолинейно (то есть без ускорения), тоже является инерциальной.

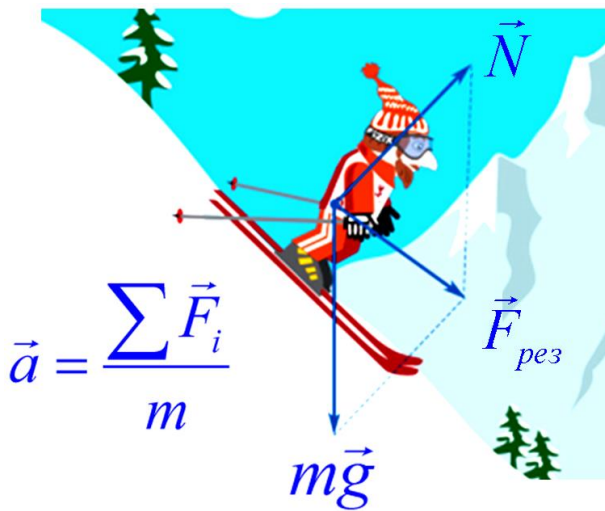


Систему отсчета, связанную с поверхностью Земли, несмотря на то что Земля вращается вокруг своей оси и, одновременно, вокруг Солнца (то есть движется, как минимум, с центростремительным ускорением), для достаточно большого количества задач можно считать инерциальной. Это связано с тем, что величина этого ускорения очень мала.

Следует помнить, что законы Ньютона справедливы только для инерциальных систем отсчёта.

Второй закон Ньютона

(основное уравнение динамики поступательного движения)



В инерциальной системе отсчёта векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна произведению массы этого тела на сообщённое ему ускорение:

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a} \quad \text{или} \quad \vec{F}_{рез} = m\vec{a}, \quad (1)$$

где

$$\vec{F}_{рез} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n -$$

резльтирующая всех сил, действующих на тело.

Само выражение $\vec{F}_{рез} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n$, является обобщением опытных данных и характеризует независимость действия сил. Оно называется **принципом суперпозиции сил**.

Здесь $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ - силы, действующие на данное тело.

Следует отметить, что второй закон Ньютона в форме (1) можно применять только в том случае, если масса тела при движении не изменяется. В противном случае необходимо пользоваться более универсальной записью закона, данной самим Ньютоном.

Его можно получить следующим образом:

$$\vec{F}_{рез} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

где $\vec{p} = m\vec{v}$ - называется **импульсом тела**, $[p] = \frac{кг \cdot м}{с} = Н \cdot с$.

Таким образом, **второй закон Ньютона** можно сформулировать так: *скорость изменения импульса тела равна действующей на него результирующей силе:*

$$\vec{F}_{рез} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2)$$

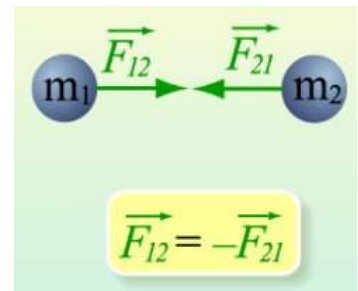
Физический смысл второго закона Ньютона:

1. Он применяется, когда тело движется с ускорением, то есть $\vec{a} \neq 0$, если $\sum \vec{F}_i \neq 0$.
2. Из векторного характера второго закона Ньютона $\vec{F}_{рез} = m\vec{a}$ следует, что ускорение тела всегда сонаправлено с результирующей всех сил, действующих на тело.
3. Вводит размерность силы: $[F] = \frac{кг \cdot м}{с^2} = Н$, Ньютон

Третий закон Ньютона (закон действия и противодействия)

Тела действуют друг на друга с силами равными по величине и противоположными по направлению:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$



Физический смысл третьего закона Ньютона:

1. Он свидетельствует о том, что сила есть результат взаимодействия тел.
2. Что силы всегда возникают парами, одинаковой природы, равны по величине, приложены к разным телам и противоположно направлены.

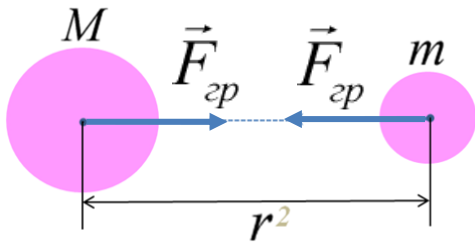
Принцип относительности Галилея

Во всех инерциальных системах отсчета законы классической механики имеют один и тот же вид.

Это означает, что при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, все математические формулы, описывающие законы механики, не меняются, а сами физические явления, при неизменных условиях, протекают совершенно одинаково.

Силы в механике

Сила гравитации $F_{\text{грав}}$ (сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками).



$$F_{\text{грав}} = G \frac{Mm}{r^2} - \text{Закон Всемирного}$$

тяготения,

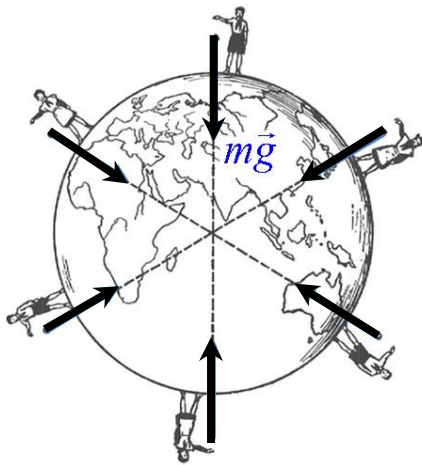
где M и m - массы материальных точек, кг;

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2} - \text{гравитационная}$$

постоянная;

r - расстояние между материальными точками, м.

Сила тяжести $\vec{F}_{\text{тяж}}$ (сила, с которой гравитационное поле Земли притягивает к себе тело).



$$\vec{F}_{\text{тяж}} = m\vec{g},$$

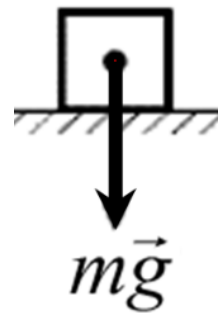
где m - масса тела, кг;

$$g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} - \text{ускорение}$$

свободного падения.

Особенность $\vec{F}_{\text{тяж}}$:

- сила тяжести приложена к центру тяжести тела и направлена всегда вертикально вниз.

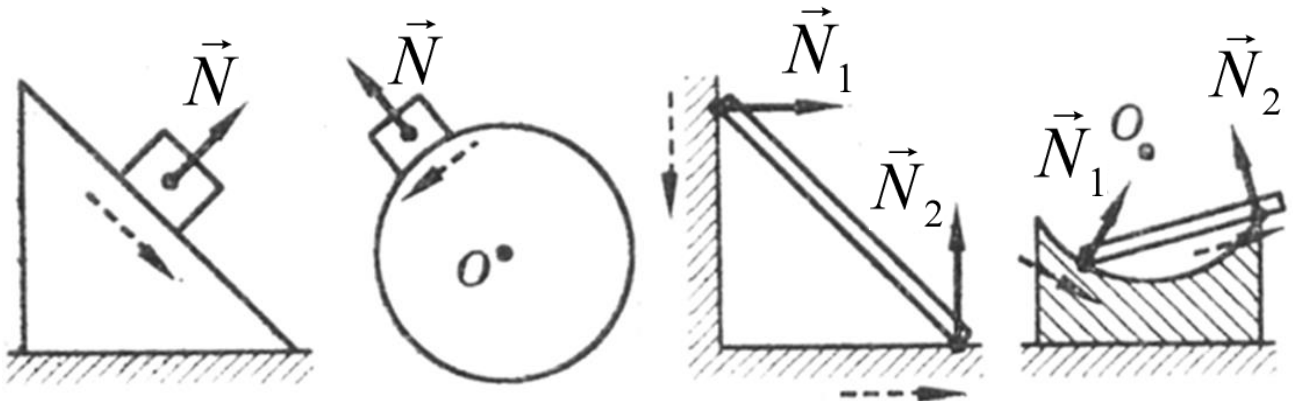


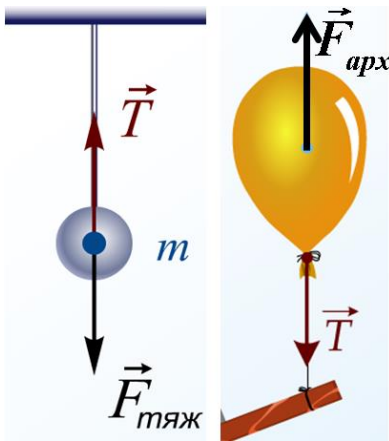
Сила реакции опоры $\vec{N}$ (эн) (сила, с которой опора действует на тело).

Особенность $\vec{N}$:

- приложена к телу и направлена перпендикулярно поверхности соприкосновения;

- величина $\vec{N}$ находится из законов Ньютона.





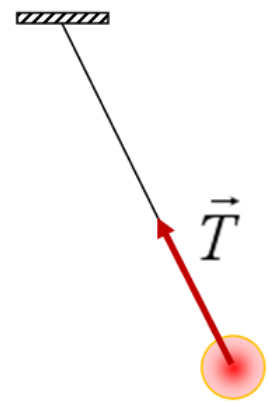
Сила натяжения нити $\vec{T}$ (тэ) (сила, с которой нить или подвес действуют на тело).

Особенность:

- сила натяжения нити приложена к телу и направлена от тела вдоль нити;
- сила натяжения $\vec{T}$ возникает при натяжении нити и её

величина зависит от характеристик движения тела;

- величина T находится из законов Ньютона.

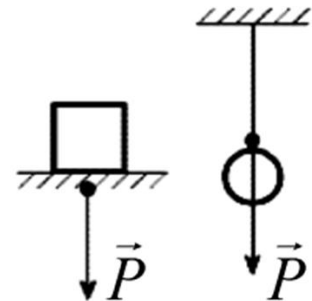


Вес тела $\vec{P}$ (сила, с которой тело, вследствие притяжения к Земле, давит на опору или растягивает подвес).

Особенность: - вес приложен к опоре или подвесу;

- величина веса тела зависит от характеристик движения тела;

- вес тела находится из законов Ньютона.

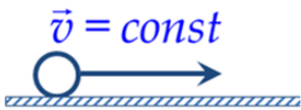


По третьему закону Ньютона $\vec{P} = -\vec{N}$ или $\vec{P} = -\vec{T}$.

Некоторые частные случаи определения веса тел

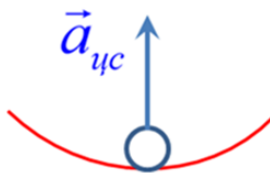
$$P = mg$$

если $\vec{v} = \text{const}$
опора горизонтальна



$$P = m(g - a) \quad \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{g}$$

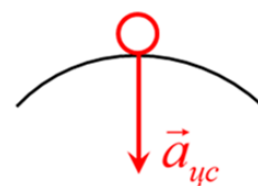
$\vec{a}$ направлено вверх



В нижней точке
вогнутого моста

$$P = m(g - a) \quad \vec{a} \downarrow \downarrow \vec{g}$$

$\vec{a}$ направлено вниз



В верхней точке
выпуклого моста

Невесомость

Невесомостью называется явление исчезновения веса тела при движении опоры с ускорением свободного падения.

Состояние невесомости наблюдается, например, в космическом корабле при его движении вокруг Земли, так как это движение представляет собой непрерывное падение с ускорением свободного падения $\vec{g}$.

Перегрузка

При движении тела и опоры с ускорением, направленным вертикально вверх, вес тела оказывается больше действующей на него силы тяжести.

Перегрузкой называется явление увеличения веса тела, вызванное ускоренным движением опоры или подвеса.

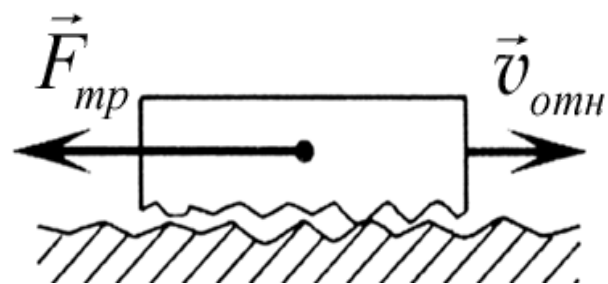
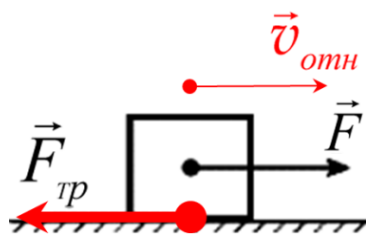
Действие перегрузки каждый испытывал на себе, находясь в лифте, на участке ускоренного движения лифта вверх. Перегрузки испытывают также космонавты, как при взлёте ракеты, так и на участке торможения корабля при входе в плотные слои атмосферы.

Силы трения

Сила трения скольжения $F_{тр}$ (это сила, возникающая между поверхностями соприкасающихся тел при их движении относительно друг друга и направленная в противоположную сторону вектора относительной скорости тела).

$$F_{тр} = \mu N,$$

где μ (мю) - коэффициент трения скольжения, безразмерная (величина табличная, зависящая от материалов трущихся тел и состояния их поверхности); N - сила реакции опоры, N .

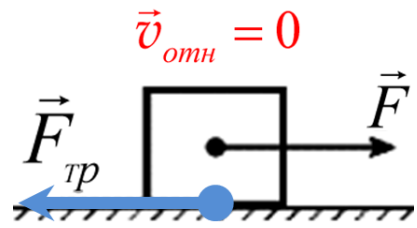


Силы трения возникают из-за шероховатостей на поверхностях соприкасающихся тел. Для уменьшения сил трения между телами применяют смазки, которые заменяют сухое трение на вязкое.

Следует помнить, что:

- величина силы трения скольжения не зависит от площади опоры, то есть, если тело повернуть на другую грань, то сила трения по величине не изменится;
- сила трения скольжения равна $F_{тр} = \mu mg$ только если тело движется по горизонтальной поверхности. В общем случае необходимо сначала определить силу реакции опоры N из законов Ньютона, а уже потом определить силу трения скольжения.

Сила трения покоя $\vec{F}_{тр.пок}$ (сила, возникающая между поверхностями соприкасающихся тел при попытке сдвинуть одно тело по поверхности другого и направленная в противоположную сторону возможного движения тела, то есть, если бы $\vec{F}_{тр.пок}$ не было).



Особенность: величина переменная и может изменяться в пределах:

$$0 \leq F_{тр.пок} \leq F_{тр}^{max} = \mu N.$$

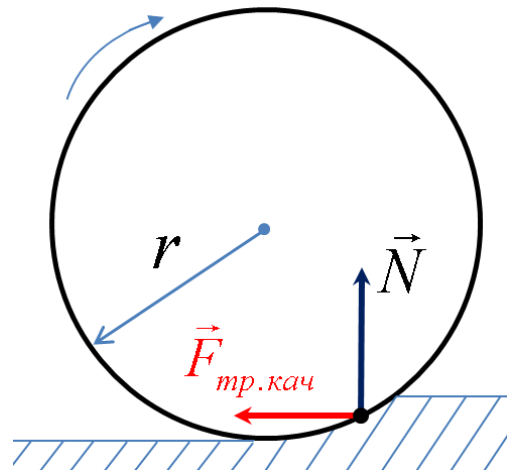
Сила трения качения $\vec{F}_{тр.кач}$ (сила, возникающая между поверхностями соприкасающихся тел при качении одного тела по поверхности другого и направленная в противоположную сторону вектора относительной скорости тела).

$$F_{тр.кач} = \mu_k \frac{N}{r},$$

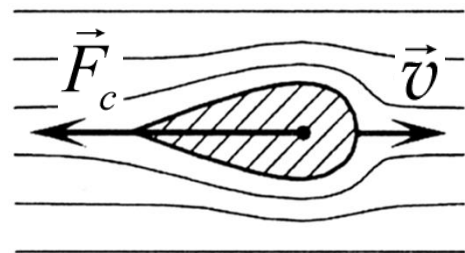
где μ_k (мю ка) - коэффициент трения качения, M , метр, (величина табличная, зависящая от материалов соприкасающихся тел и состояния их поверхности);

N - сила реакции опоры, H ;

r - радиус катящегося тела, M .



Сила сопротивления $\vec{F}_c$ (сила, возникающая при движении тела в жидкости или газе и направленная в противоположную сторону вектора относительной скорости тела $\vec{v}$).



Если относительная скорость тела v много меньше скорости звука в данной среде, то есть $v \ll v_{звук}$, то

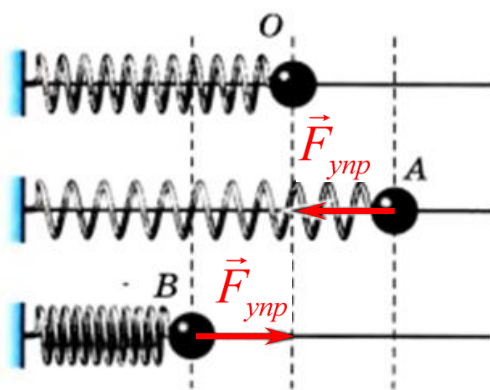
$$F_c = \alpha v.$$

Если относительная скорость тела v приблизительно равна скорости звука в данной среде, то есть $v \approx v_{звук}$, то $F_c = \beta v^2$.

Если относительная скорость тела v много больше скорости звука в данной среде, то есть $v \gg v_{звук}$, то

$$F_c = \gamma v^3.$$

Силы упругости



Сила упругости $\vec{F}_{упр}$ (сила, возникающая при деформации тела).

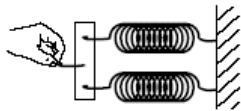
$F_{упр} = k x$ - закон Гука для

упругой деформации,

где k (ка)- коэффициент упругости, $\frac{H}{м}$;

x (икс)- величина деформации, м.

Жесткость системы пружин $k_{общ}$ при их параллельном соединении



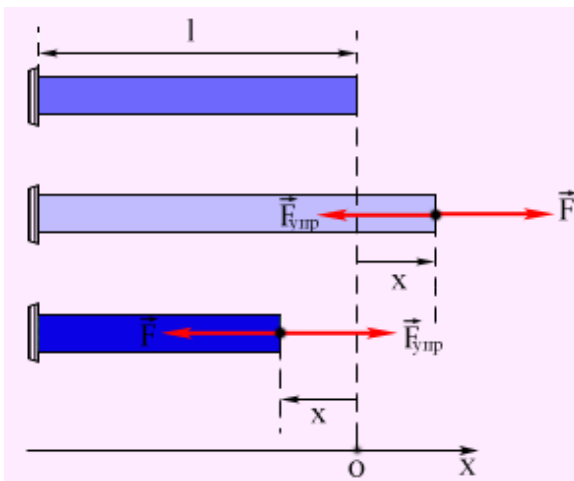
$$k_{общ} = k_1 + k_1 + \dots + k_n$$

Жесткость системы пружин $k_{общ}$ при их последовательном соединении



$$\frac{1}{k_{общ}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

Закон Гука для упругой деформации сжатия-растяжения однородного стержня



$$\sigma = \varepsilon E$$

где σ (сигма) - нормальное напряжение, возникающее в деформированном стержне, Па.

$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{S},$$

$F_{\perp}$ - перпендикулярная составляющая деформирующей силы, действующей на стержень, Н;

S (эс)- площадь поперечного сечения стержня, $м^2$;

E (е) - модуль Юнга (величина табличная), Па.

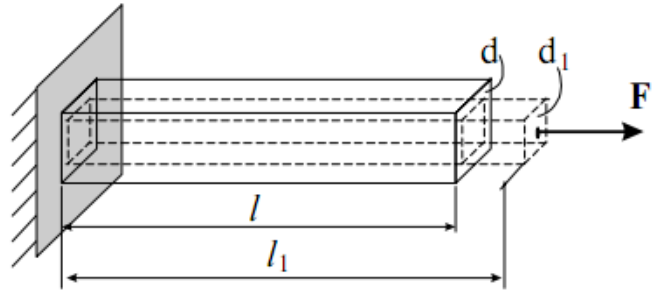
Пример: сталь $E = 210 \cdot 10^9$ Па, медь $E = 120 \cdot 10^9$ Па.

Величину деформации тела характеризует **относительное продольное удлинение тела ε** :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l},$$

где ε (эпсилон) - относительное продольное удлинение тела, величина безразмерная;

$\Delta l = l_1 - l$ - абсолютное удлинение (то есть изменение длины тела при деформации), м; l - начальная длина тела, м; l_1 - конечная длина тела, м.



Относительное поперечное растяжение тела ε' :

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d} = \frac{d_1 - d}{d},$$

где ε' (эпсилон штрих) - относительное поперечное растяжение тела, величина безразмерная;

$\Delta d = d_1 - d$ - абсолютное поперечное растяжение (то есть изменение диаметра стержня при деформации), м;

d - начальный диаметр стержня, м; d_1 - конечный диаметр стержня, м.

Причём $\varepsilon' = -\mu\varepsilon$,

где μ (мю) - коэффициент Пуассона (табличная величина), безразмерная.

Пример: сталь $\mu = 0,2$, медь $\mu = 0,3$.

Закон Гука для упругой деформации сдвига однородного прямоугольного параллелепипеда

$$\tau = \gamma G,$$

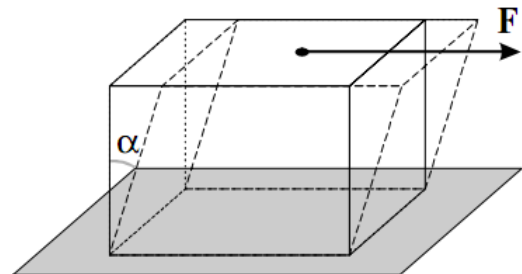
где τ (тау) - тангенциальное напряжение, Па.

$$\tau = \frac{F_\tau}{S},$$

где F_τ (эф тау) - касательная составляющая деформирующей силы, действующей на параллелограмм вдоль плоскости сдвига, Н;

S (эс) - площадь сечения плоскости сдвига параллелограмма, м²;

G (жэ) - модуль сдвига (величина табличная), Па.



Пример: сталь $G = 100 \cdot 10^9 \text{ Па}$, медь $G = 50 \cdot 10^9 \text{ Па}$.

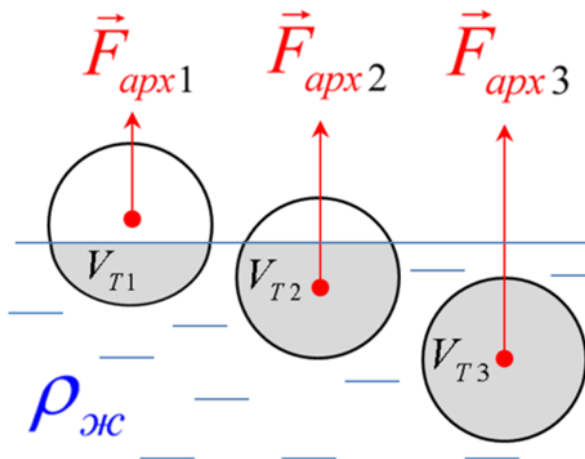
Причём $E = 2G(1 + \mu)$.

Величину деформации характеризует **относительный сдвиг** γ (гамма):

$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α - угол сдвига, *рад* (радиан).

Сила Архимеда $F_{арх}$ (выталкивающая сила, направленная вертикально вверх и действующая на погружённое в жидкость или газ тело).

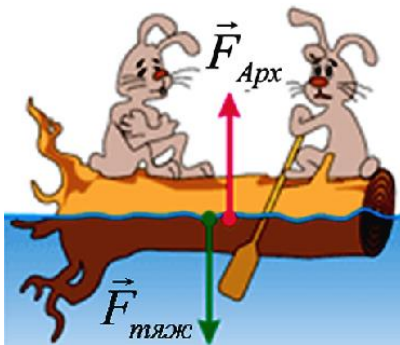


$$F_{арх} = \rho_{ж} g V_T,$$

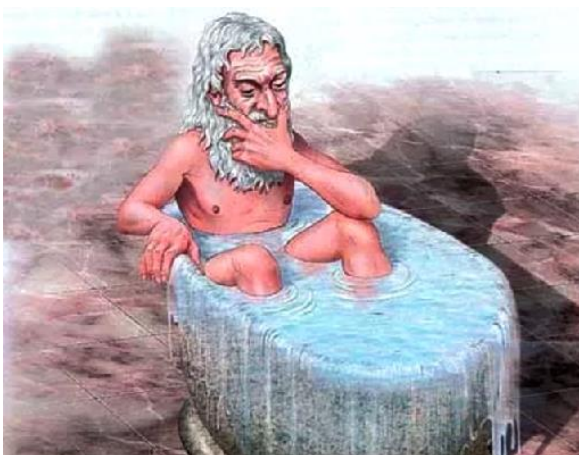
где $\rho_{ж}$ (ро)-плотность жидкости (или газа), $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;

g (жэ) - ускорение свободного падения, $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$;

V_T - объём погружённой в жидкость или газ части тела, м^3 .



Особенность $F_{арх}$: приложена к центру тяжести объёма вытесненной жидкости и направлена вертикально вверх.



Закон Архимеда:

На тело, погружённое в неподвижную жидкость (или газ), действует направленная вертикально вверх выталкивающая сила, равная весу жидкости (или газа) в объёме погружённой части тела.

Неинерциальные системы отсчёта

Неинерциальными системами отсчёта (НСО) называются системы отсчёта, которые движутся с ускорением относительно инерциальных систем отсчёта.

В неинерциальных системах отсчёта помимо сил, действующих в инерциальных системах, возникают ещё особые силы, которые обусловлены ускоренным движением неинерциальной системы отсчёта и которые называются *силами инерции*.

Силы инерции - это силы, обусловленные ускоренным движением неинерциальной системы отсчёта относительно инерциальной системы отсчёта.

Таким образом, силы инерции вызываются не взаимодействием тел, а ускоренным движением системы отсчёта.

Особенности сил инерции

1. Для них не выполняется третий закон Ньютона, так как не возможно указать тело со стороны которого действуют силы инерции.
2. Они реально существуют и могут быть измерены, например, динамометром.
3. Как и силы тяготения, силы инерции пропорциональны массе тела.

Различают следующие силы инерции:

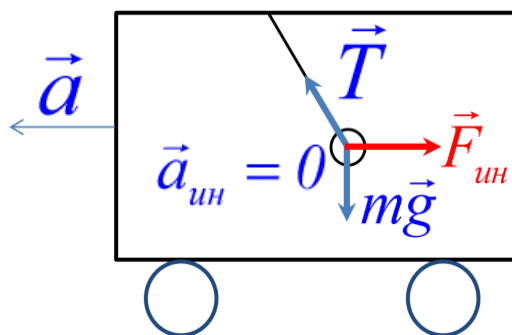
1. **Сила инерции** $\vec{F}_{ин}$.

Обусловлена поступательным движением неинерциальной системы отсчёта с ускорением $\vec{a}$ относительно инерциальной системы отсчёта:

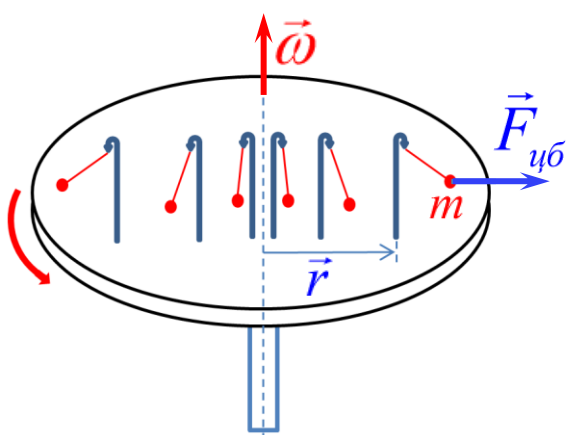
$$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a},$$

где $\vec{F}_{ин}$ - сила инерции, действующая на тело в поступательно движущейся неинерциальной системе отсчёта; m - масса тела; $\vec{a}$ - ускорение неинерциальной системы отсчёта относительно инерциальной.

Сила инерции $\vec{F}_{ин}$ появляется, например, в автомобиле или самолёте при их разгоне.



2. Центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб}$.



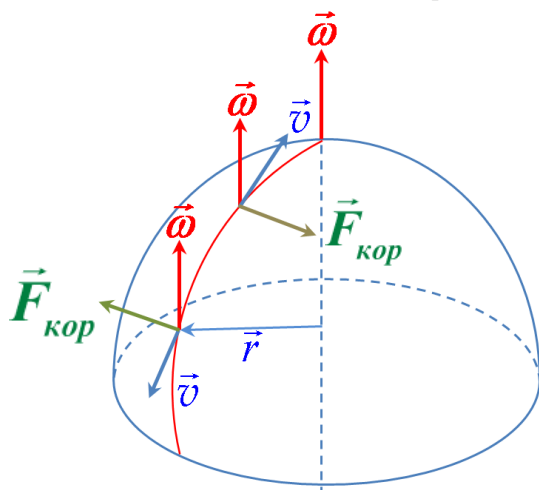
Обусловлена вращательным движением неинерциальной системы отсчёта с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и действует как на неподвижное, так и на движущееся относительно неинерциальной системы отсчёта тело:

$$\vec{F}_{цб} = -m\omega^2\vec{r},$$

где $\vec{F}_{цб}$ - центробежная сила

инерции, действующая на тело во вращающейся системе отсчёта;
 ω - угловая скорость неинерциальной системы отсчёта относительно инерциальной; m - масса тела;
 $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведённый от центра вращения до тела.
 Центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб}$ является причиной отклонения кресел при вращении каруселей.

3. Сила Кориолиса $\vec{F}_{кор}$



Обусловлена вращательным движением неинерциальной системы отсчёта с угловой скоростью $\vec{\omega}$ и действует только на движущиеся относительно неинерциальной системы отсчёта тела:

$$\vec{F}_{кор} = 2m[\vec{\omega}\vec{v}],$$

где $\vec{F}_{кор}$ - сила Кориолиса, действующая на тело, движущееся со скоростью $\vec{v}$ относительно

вращающейся неинерциальной системы отсчёта;
 $\vec{\omega}$ - угловая скорость неинерциальной системы отсчёта относительно инерциальной системы отсчёта;
 $\vec{v}$ - скорость тела относительно неинерциальной системы отсчёта;
 m - масса тела.

Сила Кориолиса $\vec{F}_{кор}$ является причиной завихрения циклонов, размывания одного из берегов рек, отклонения в сторону траектории полёта снарядов и др.

Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчета

Если в инерциальной системе отсчёта учитывать действующие на тело силы инерции, то основное уравнение динамики будет аналогично второму закону Ньютона:

в неинерциальной системе отсчёта векторная сумма всех сил, действующих на тело, включая и силы инерции, равна произведению массы этого тела на сообщённое ему ускорение относительно неинерциальной системы отсчёта:

$$\sum \vec{F}_i + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{кор} = m\vec{a}_н,$$

где $\sum \vec{F}_i$ - сумма всех сил, действующих на тело;

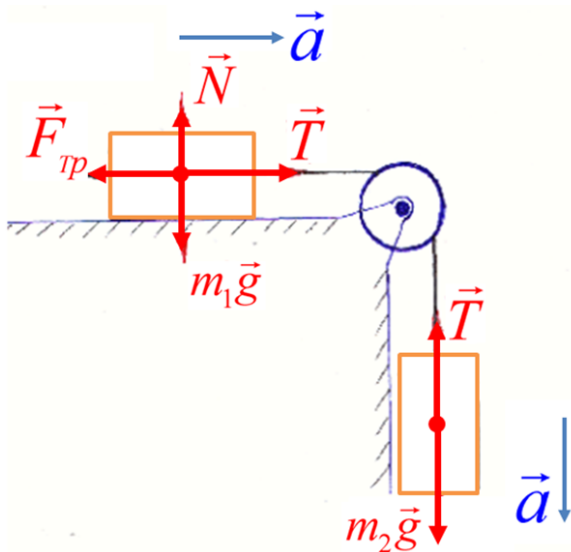
$\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$, $\vec{F}_{цб} = -m\omega^2\vec{r}$ и $\vec{F}_{кор} = 2m[\vec{\omega}\vec{v}]$ - силы инерции;

$\vec{a}$ - ускорение неинерциальной системы отсчёта относительно инерциальной;

$\vec{a}_н$ - ускорение тела относительно неинерциальной системы отсчёта.

Задачи по динамике материальной точки и абсолютно твёрдого тела встречаются на составление уравнений

поступательного движения



вращательного движения

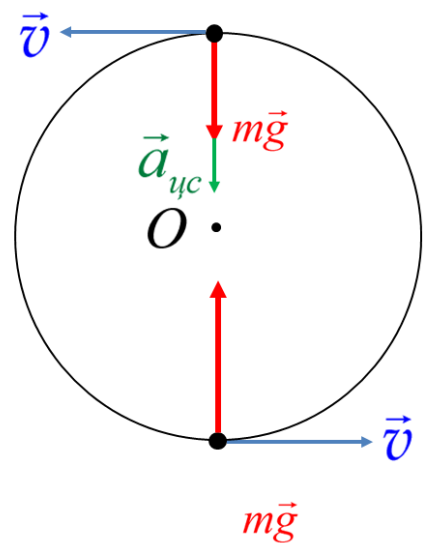


Схема решения задач по динамике материальной точки или поступательного движения абсолютно твёрдого тела

1. Сделайте чертеж к задаче, на котором нарисуйте тела, рассматриваемые в задаче, все силы, действующие на каждое тело, и укажите направления ускорений этих тел.

2. Если тело движется без ускорения (то есть покоится или движется равномерно и прямолинейно), то запишите для него первый закон Ньютона в виде
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0.$$

Если тело движется с ускорением, то запишите для него второй закон Ньютона в виде
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = m\vec{a}.$$

3. Для каждого тела распишите закон Ньютона в проекциях на оси координат, для чего сначала:

- для каждого тела выберите удобную систему координат. Начало координат обычно помещают в рассматриваемой материальной точке или в центре тяжести тела, а одну из координатных осей направляют по вектору ускорения этого тела;

- для каждого тела распишите своё векторное уравнение в проекциях на оси координат с учётом знаков проекций сил.

4. Решите полученную систему уравнений.

Необходимо помнить, что число уравнений должно быть равно числу неизвестных. Если уравнений динамики окажется недостаточно, то полученную систему дополняют уравнениями кинематики или законами изменения или сохранения.

Если в задаче требуется найти **вес тела** $\vec{P}$, то следует помнить, что по третьему закону Ньютона он равен по величине, но противоположен по направлению силе реакции опоры (то есть $\vec{P} = -\vec{N}$) или силе натяжения нити (то есть $\vec{P} = -\vec{T}$).

Следует помнить, что законы Ньютона справедливы только в инерциальных системах отсчёта. *Обычно в качестве инерциальной системы отсчёта принимают поверхность Земли* (вообще-то, любой участок поверхности участвует в суточном вращении Земли, и поэтому его нельзя считать инерциальной системой, однако его центростремительное ускорение настолько мало, что им обычно пренебрегают).

Чтобы правильно определить количество сил, действующих на тело, необходимо придерживаться следующего правила:

Сколько физических полей (гравитационное, электрическое, магнитное, электромагнитное) и тел действуют на данное тело, столько и сил (плюс силы трения и сопротивления, если они есть по условию задачи).

Основные свойства физических полей

Гравитационное поле оказывает силовое воздействие на тела, обладающие массой (сила тяжести и сила гравитации).

Электрическое поле оказывает силовое воздействие на неподвижные и движущиеся электрические заряды (сила Кулона).

Магнитное поле оказывает силовое воздействие на магниты, проводники с током (сила Ампера) и движущиеся электрические заряды (сила Лоренца).

Электромагнитное поле одновременно обладает свойствами электрического и магнитного полей.

После нахождения количества сил, действующих на тело, нужно определить порядок величин этих сил. Теми силами, величина которых во много раз меньше остальных, обычно пренебрегают, так как они существенного влияния на ситуацию не оказывают, а решение задачи значительно усложняют.

Например, силами гравитационного притяжения между телами малой массы обычно пренебрегают из-за их чрезвычайно незначительной величины.

Если в условии задачи не указана среда, в которой движется тело, то обычно предполагается вакуум, поэтому силой Архимеда и силой сопротивления воздуха так же пренебрегают.

Если в задаче рассматривается движение связанных между собой нерастяжимой нитью тел, то следует помнить, что ускорения этих тел имеют одинаковую величину $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$.

Если нить и блоки, через которые переброшена нить невесомы и трения в оси блоков нет, то силы натяжения $\vec{T}$, действующие как на первое, так и на второе тела, одинаковы, то есть $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$.

Если тело движется по гладкой поверхности, то силой трения пренебрегают. Следует так же помнить, что сила трения скольжения не зависит от площади поверхности соприкасающихся тел, а определяется лишь силой нормального давления на поверхность (которая равна по третьему закону Ньютона силе реакции опоры)

Напомним, что:

- ускорение тела всегда сонаправлено с результирующей силой, действующей на тело;
- ускорение тела в данный момент времени во всех инерциальных системах отсчёта имеет одно и то же значение.

Схема решения задач по динамике равномерного движения материальной точки по окружности

1. Сделайте чертёж к задаче, на котором нарисуйте точку, движущуюся по окружности, все силы, действующие на неё, и направление центростремительного ускорения. Помните, что точка движется равномерно по окружности постоянного радиуса только в том случае, если равнодействующая всех сил, действующих на неё, направлена по радиусу к центру этой окружности. Эта сила сообщает точке центростремительное ускорение, которое так же направлено к центру окружности.

2. Ось ОХ направьте по направлению центростремительного ускорения, то есть к центру окружности, по которой движется материальная точка.

Запишите второй закон Ньютона сначала в векторном виде $\sum \vec{F}_i = m \vec{a}_{ц.с.}$, а затем в проекциях на оси координат, где

$$a_{ц.с.} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega v.$$

3. Решите полученную систему уравнений.

При необходимости её можно дополнить уравнениями связи

$$S = \varphi r, \quad v = \omega r, \quad \omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}.$$

Схема решения задач по динамике материальной точки в неинерциальной системе отсчёта

1. Сделайте чертеж к задаче, на котором нарисуйте материальную точку, рассматриваемую в задаче, все силы, действующие на точку, а так же силы инерции, действующие на неё, и укажите направление ускорения точки относительно неинерциальной системы отсчёта.

2. Если материальная точка движется без ускорения относительно неинерциальной системы отсчёта (то есть покоится или движется равномерно и прямолинейно), то запишите уравнение динамики в виде

$$\sum \vec{F}_i + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{кор} = 0.$$

Если точка движется с ускорением $\vec{a}_n$ относительно неинерциальной системы отсчёта, то запишите уравнение динамики в виде

$$\sum \vec{F}_i + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{кор} = m\vec{a}_n.$$

3. Распишите уравнение динамики в проекциях на оси координат, для чего сначала выберите удобную систему координат. Начало координат обычно помещают в рассматриваемой материальной точке, а одну из координатных осей направляют по вектору ускорения этой точки относительно неинерциальной системы отсчёта.

4. Решите полученную систему уравнений.

Примеры решения задач по динамике

Задача 10. Груз массой $m_1 = 400 \text{ г}$, находящийся на гладкой наклонной плоскости, расположенной под углом 30° к горизонту, соединён невесомой нерастяжимой нитью с другим грузом массой $m_2 = 1 \text{ кг}$. Нить перекинута через невесомый блок, расположенный на вершине наклонной плоскости. Определите ускорения, с которыми движутся грузы и силы натяжения нитей. Трения в оси блока нет. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $a_1 = a_2 = 5,7 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ и $T_1 = T_2 = 4,3 \text{ Н}$

Анализ задачи

Дано:
$m_1 = 0,4 \text{ кг}$
$m_2 = 1 \text{ кг}$
$\alpha = 30^\circ$
$a_1 - ?, a_2 - ?$
$T_1 - ?, T_2 - ?$

Прежде всего, надо сообразить, что данная задача на динамику. Если в условии задачи заданы массы тел, есть информация о силах, коэффициентах трения и т.д., то это задача на динамику (так как в кинематике понятий масса и сила нет). Следовательно, для определённых тел можно будет записать уравнения динамики либо поступательного, либо вращательного движения. Поэтому необходимо

будет определить эти тела.

К примеру, в нашей задаче рассматриваются следующие тела: наклонная плоскость (о которой кроме угла наклона больше ничего неизвестно), невесомая нерастяжимая нить, два груза известной массы и невесомый блок. Причём грузы движутся поступательно, а блок вращается.

Обычно начинают решение с рассмотрения одного или двух тел, для которых можно записать наиболее простые уравнения динамики, а затем, если этих уравнений окажется недостаточно, записывают уравнения динамики для других тел, либо эту систему уравнений дополняют уравнениями связи между поступательным и вращательным движениями, уравнениями кинематики или законами сохранения.

В нашей задаче известна масса двух грузов, которые движутся поступательно, поэтому начнём решение с них и применим к ним схему решения задач на динамику материальной точки или поступательного движения абсолютно твёрдого тела.

Схема решения задач по динамике материальной точки или поступательного движения абсолютно твёрдого тела

1. Сделайте чертеж к задаче, на котором нарисуйте тела, рассматриваемые в задаче, все силы, действующие на каждое тело, и укажите направления ускорений этих тел.

2. Если тело движется без ускорения (то есть покоится или движется равномерно и прямолинейно), то запишите для него первый закон Ньютона в виде $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$.

Если тело движется с ускорением, то запишите для него второй закон Ньютона в виде $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = m\vec{a}$.

3. Для каждого тела распишите закон Ньютона в проекциях на оси координат, для чего сначала

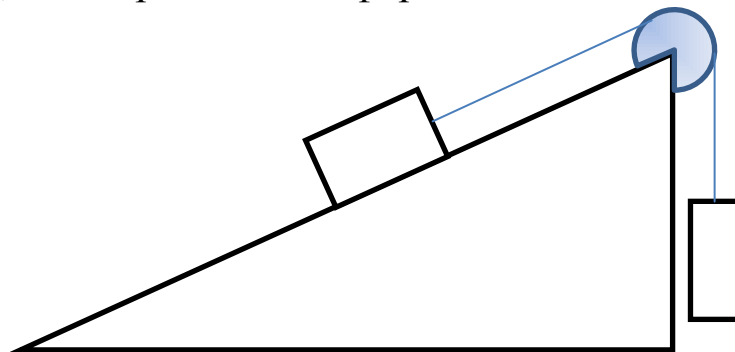
- для каждого тела выберите удобную систему координат. Начало координат обычно помещают в рассматриваемой материальной точке или в центре тяжести тела, а одну из координатных осей направляют по вектору ускорения этого тела;

- для каждого тела распишите своё векторное уравнение в проекциях на оси координат с учётом знаков проекций сил.

4. Решите полученную систему уравнений.

Решение

Итак, согласно схеме решения задач делаем рисунок, на котором изображаем тела, о которых есть информация в задаче:



Теперь необходимо нарисовать все силы, действующие на каждое тело.

В правильном определении количества сил и их направлений обычно заключается основная трудность задачи. В этом нам поможет третий закон Ньютона, из которого следует, что силы всегда возникают парами и имеют характер взаимодействия.

Для этого необходимо применить следующее правило:

Сколько физических полей (гравитационное, электрическое, магнитное, электромагнитное) и тел действует на данное тело, столько и сил (плюс силы трения и сопротивления, если они есть по условию задачи).

Обычно рассмотрение сил начинают с физических полей, действующих на тело. Для этого необходимо знать свойства этих полей.

Гравитационное поле оказывает силовое воздействие на тела, обладающие массой (сила тяжести и сила гравитации).

Электрическое поле оказывает силовое воздействие на неподвижные и движущиеся электрические заряды (сила Кулона).

Магнитное поле оказывает силовое воздействие на магниты, проводники с током (сила Ампера) и движущиеся заряды (сила Лоренца).

Электромагнитное поле одновременно обладает свойствами электрического и магнитного полей.

Земля обладает всеми видами физических полей. По условию задачи грузики не имеют электрического заряда, не намагничены и по ним не протекает электрический ток. Поэтому электрическое, магнитное и электромагнитное поля на них действовать не будут. Однако грузики обладают массой, поэтому из всех физических полей на них будет действовать только сила тяжести со стороны гравитационного поля Земли.

Теперь рассмотрим, какие тела действуют на каждый груз в отдельности.

На грузик массой m_1 действует наклонная плоскость с силой реакции опоры $\vec{N}$, которая направлена перпендикулярно поверхности, и нить с силой натяжения $\vec{T}_1$, которая направлена вдоль нити.

Кроме того в реальной ситуации на грузик будет действовать окружающий его воздух, создавая силу Архимеда и сопротивление воздуха при движении грузика, а также все окружающие грузик тела посредством сил гравитационного притяжения согласно закона Всемирного тяготения.

Возникает вопрос, что делать с этими силами?

Здесь на помощь приходит следующее правило:

после определения количества сил, действующих на тело, нужно определить, какой порядок величин этих сил. Если окажется, что какие-то силы намного меньше других, то ими обычно пренебрегают, так как они на характер движения практически не оказывают влияние, а решение задачи могут сильно усложнить.

Например, силами гравитационного притяжения между телом и окружающими его предметами из-за их малых масс обычно пренебрегают, так как в этом случае силы гравитации оказываются на много порядков меньше силы тяжести, действующей на тело.

Если в условии задачи не указана среда, в которой движется тело, то обычно предполагается вакуум, поэтому силой Архимеда и силой сопротивления воздуха так же пренебрегают.

Поэтому, из всех тел, которые реально действуют на первый грузик, для решения задачи существенны лишь наклонная плоскость (иначе грузик не двигался бы вдоль неё), которая действует силой реакции опоры $\vec{N}$ и нить, действующая силой натяжения нити $\vec{T}_1$, под действием которой грузик перемещается.

Теперь необходимо решить вопрос с силами трения. По условию задачи наклонная плоскость гладкая, следовательно, сила трения на грузик действовать не будет.

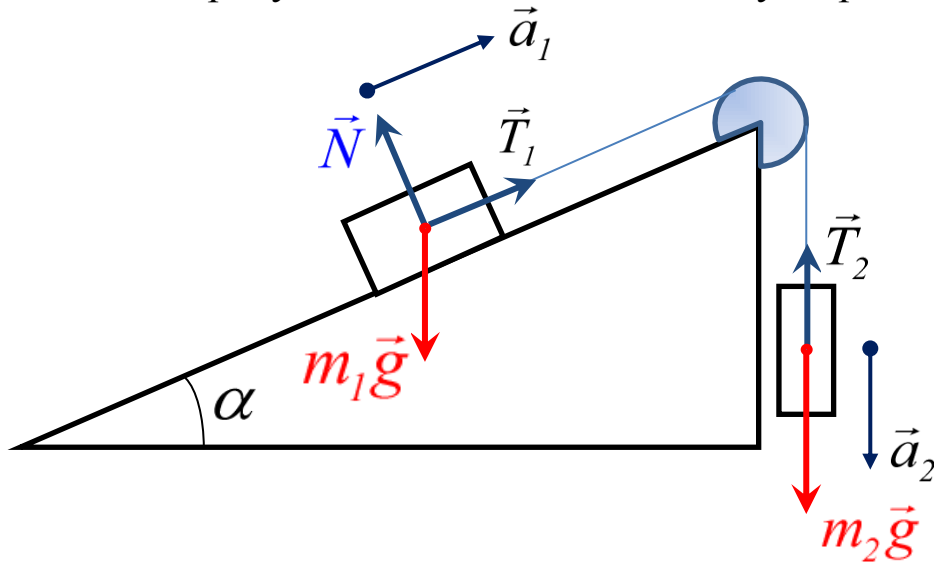
Таким образом, на первый грузик основное влияние будут оказывать лишь три силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_1$.

Аналогично, рассматривая второй грузик, можно прийти к выводу, что основное влияние на него будут оказывать лишь сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$.

Далее, расставляем все силы, действующие на наши грузики, и указываем направления их ускорений.

Что касается ускорения грузиков, то их направления по условию задачи не указаны. Поэтому мы их нарисуем, исходя из логических соображений. В крайнем случае, если мы ошибёмся, то при решении задачи у нас получатся отрицательные ускорения. Это будет указывать на то, что мы неправильно определили их направления.

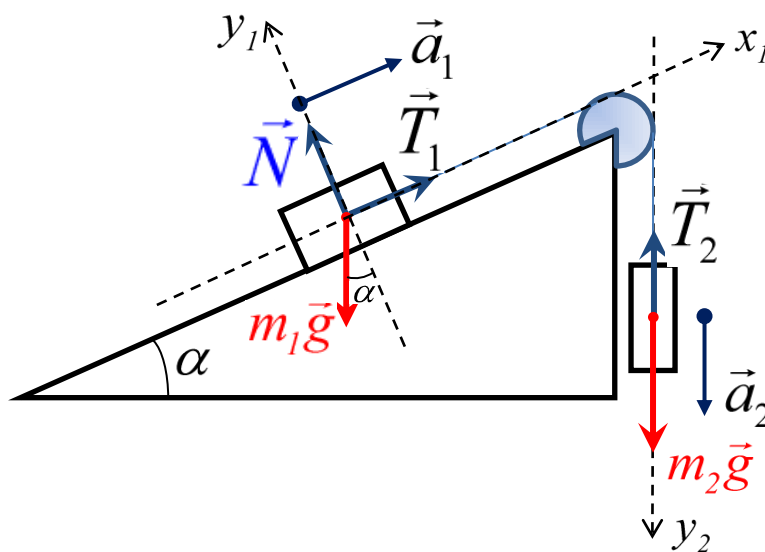
Итак, расставляем на рисунке все основные силы и ускорения тел.



Далее, согласно пункту 2 схемы решения задач, записываем уравнения динамики для первого и второго грузика. Так как они движутся поступательно с ускорениями, то для них выполняется второй закон Ньютона в виде

$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2 \end{cases} \quad (10.1)$$

Теперь надо нарисовать удобную для каждого тела систему координат и расписать соответствующее векторное уравнение на эти оси. Согласно правилу, располагаем начало координат в центре масс каждого грузика и одну из координатных осей направляем по вектору ускорения этого тела.



Обратите внимание, что для второго грузика ось OX не нужна.

Теперь расписываем уравнения системы (10.1) на соответствующие оси координат.

$$\begin{cases} \text{на } OX_1 : T_1 - m_1 g \sin \alpha = m_1 a_1 \\ \text{на } OY_1 : N - m_1 g \cos \alpha = 0 \\ \text{на } OY_2 : m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \end{cases} \quad (10.2)$$

Прежде чем начинать решать эту систему уравнений, необходимо определить количество неизвестных в ней и сравнить их с числом уравнений в системе. Если неизвестных окажется больше чем уравнений, то либо понадобятся ещё уравнения, либо необходимо будет провести дополнительный анализ условия задачи.

Из анализа системы (10.2) следует, что в ней пять неизвестных (T_1, T_2, N, a_1 и a_2) и всего три уравнения. Таким образом, на данный момент эту систему уравнений решить нельзя.

Поэтому вернёмся ещё раз к условию задачи и внимательно разберём всю информацию, которую мы ещё не использовали.

По условию задачи нить нерастяжима. Это приводит к тому, что в любой момент времени после начала движения, у грузиков будут одинаковыми по величине пути S , скорости v и ускорения a .

Отсюда следует, что ускорения грузов будут одинаковыми, то есть

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a.$$

Из условия задачи так же следует, что нить и блок невесома и трения в оси блока нет. Это приводит к тому, что силы натяжения T в любой точке нити слева от блока и справа от блока будут одинаковыми. Это легко доказать, если расписать уравнения динамики поступательного движения для любого кусочка нити массой Δm на направление движения слева и справа от блока. В результате получим

$$\text{слева от блока} \quad T'_1 - T'_2 - \Delta m_1 \vec{g} = \Delta m_1 \vec{a},$$

$$\text{справа от блока} \quad T''_2 - T''_1 + \Delta m_2 \vec{g} = \Delta m_2 \vec{a}.$$

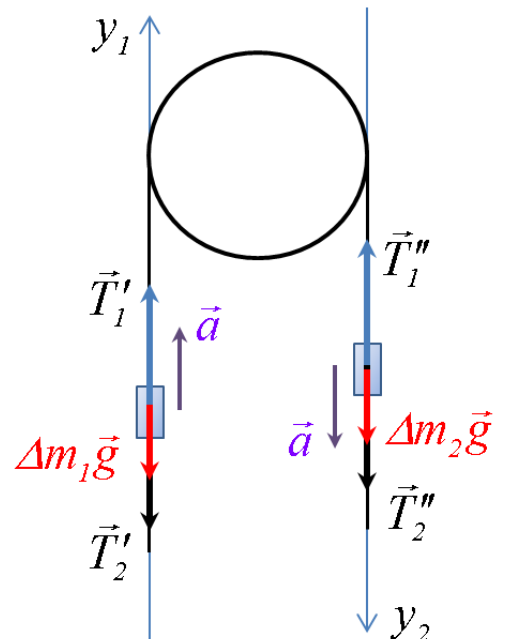
Так как нить невесома, то $\Delta m_1 = \Delta m_2 = 0$, следовательно, получим

$$\text{слева от блока} \quad T'_1 - T'_2 = 0,$$

$$\text{справа от блока} \quad T''_2 - T''_1 = 0.$$

Отсюда следует, что

$$|T'_2| = |T'_1| = T' \quad \text{и} \quad |T''_2| = |T''_1| = T'',$$



где T' - сила натяжения нити слева от блока в любой её точке,
а T'' - сила натяжения нити справа от блока в любой её точке.

По условию задачи блок невесом и трения в оси блока нет. Это приводит к тому, что силы натяжения нити по обе его стороны тоже должны быть равны, иначе невесомый блок будет раскручиваться с бесконечным ускорением.

Таким образом, мы получили, что сила натяжения в любой точке нити будет одинаковой и, следовательно, $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$.

Тогда систему уравнений (10.2) можно переписать так:

$$\begin{cases} \text{на } OX_1 : T - m_1 g \sin \alpha = m_1 a & (10.3) \\ \text{на } OY_1 : N - m_1 g \cos \alpha = 0 & (10.4) \\ \text{на } OY_2 : m_2 g - T = m_2 a & (10.5) \end{cases}$$

В итоге у нас получилось три уравнения с тремя неизвестными. Чтобы найти ускорение грузов, сложим уравнения (10.3) и (10.5):

$$T - m_1 g \sin \alpha + m_2 g - T = m_1 a + m_2 a,$$

Следовательно, $g(m_2 - m_1 \sin \alpha) = a(m_1 + m_2)$ и

$$a = g \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2}. \quad (10.6)$$

Проверим размерность уравнения (10.6).

$$\left[\frac{M}{c^2} \right] = \frac{M}{c^2} \cdot \frac{K\mathcal{Z} - K\mathcal{Z}}{K\mathcal{Z} + K\mathcal{Z}} = \frac{M}{c^2} \cdot \frac{K\mathcal{Z}}{K\mathcal{Z}} = \frac{M}{c^2}.$$

Так как размерность сходится, то подставив данные из условия задачи, получим

$$a = 10 \frac{M}{c^2} \cdot \frac{1K\mathcal{Z} - 0,4K\mathcal{Z} \cdot 0,5}{1K\mathcal{Z} + 0,4K\mathcal{Z}} = 10 \frac{M}{c^2} \cdot \frac{0,8K\mathcal{Z}}{1,4K\mathcal{Z}} = 5,7 \frac{M}{c^2}.$$

Силу натяжения нити найдём из уравнения (10.5): $T = m_2(g - a)$.

Тогда
$$T = 1K\mathcal{Z} \cdot \left(10 \frac{M}{c^2} - 5,7 \frac{M}{c^2} \right) = 4,3 H.$$

Ответ: $a_1 = a_2 = 5,7 \frac{M}{c^2}$ и $T_1 = T_2 = 4,3 H$.

Задача11: Тело малых размеров подвешено на невесомой нерастяжимой нити к потолку вагона, движущемуся прямолинейно с ускорением 580 см/с. Определите угол отклонения нити от вертикали.

Ответ: $\alpha \approx 30^0$

Анализ задачи

Дано:	Решим эту задачу двумя способами. Рассмотрим данную ситуацию сначала относительно инерциальной системы отсчёта (поверхности Земли), а потом относительно неинерциальной системы отсчёта (относительно движущегося с ускорением вагона).
$a = 5,8 \frac{м}{с^2}$	
$\alpha - ?$	

Решение

Способ №1

Решим задачу по динамике материальной точки относительно инерциальной системы отсчёта (относительно поверхности Земли).

Схема решения задач по динамике материальной точки или поступательного движения абсолютно твёрдого тела

1. Сделайте чертеж к задаче, на котором нарисуйте тела, рассматриваемые в задаче, все силы, действующие на каждое тело, и укажите направления ускорений этих тел.

2. Если тело движется без ускорения (то есть покоится или движется равномерно и прямолинейно), то запишите для него первый закон Ньютона в виде $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$.

Если тело движется с ускорением, то запишите для него второй закон Ньютона в виде $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = m\vec{a}$.

3. Для каждого тела распишите закон Ньютона в проекциях на оси координат, для чего сначала

- для каждого тела выберите удобную систему координат (начало координат обычно помещают в рассматриваемой материальной точке или в центре тяжести тела, а одну из координатных осей направляют по вектору ускорения этого тела;

- для каждого тела распишите своё векторное уравнение в проекциях на оси координат с учётом знаков проекций сил.

4. Решите полученную систему уравнений.

Итак, делаем рисунок к задаче относительно инерциальной системы отсчёта (поверхности Земли) (см. рис.11.1).

Определим силы, действующие на грузик, висающий на нити.

По условию задачи, грузик не имеет электрического заряда, не намагничен и по нему не протекает электрический ток. Поэтому электрическое, магнитное и электромагнитное поля на него действовать не будут. Однако грузик обладает массой, поэтому из всех физических полей на него будет действовать только сила тяжести $m\vec{g}$ со стороны гравитационного поля Земли.

Теперь рассмотрим, какие тела действуют на грузик. Это невесомая нерастяжимая нить, которая будет действовать на грузик с силой натяжения нити $\vec{T}$.

По условию задачи, грузик имеет малые размеры, то есть его можно рассматривать как материальную точку. Следовательно, сила Архимеда действовать на тело не будет.

Силами гравитационного притяжения $\vec{F}_{gp}$ к окружающим телам, ввиду их чрезвычайной малости, пренебрегаем.

Запишем второй закон Ньютона для тела:

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}. \quad (11.1)$$

Распишем уравнение (11.1) на оси координат:

$$OX: T \sin \alpha = ma$$

$$OY: T \cos \alpha - mg = 0$$

или

$$OX: T \sin \alpha = ma \quad (11.2)$$

$$OY: T \cos \alpha = mg \quad (11.3)$$

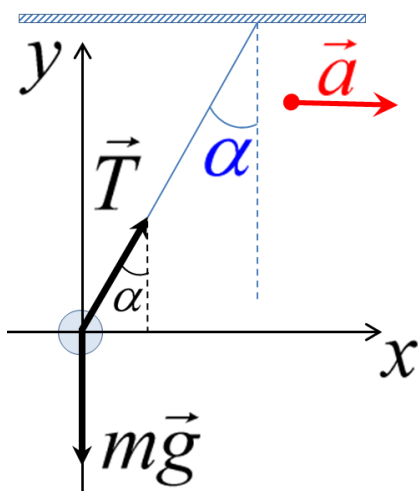


Рис.11.1

Разделим (11.2) на (11.3):

$$\frac{T \sin \alpha}{T \cos \alpha} = \frac{ma}{mg}, \Rightarrow, \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}, \Rightarrow,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{g}.$$

Окончательно имеем
$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{5,80 \frac{m}{c^2}}{10 \frac{m}{c^2}} = \operatorname{arctg} 0,58 \approx 30^\circ.$$

Способ №2

Решим эту задачу относительно системы отсчёта, связанной с движущимся вагоном.

Отличие заключается в том, что мы будем рассматривать ситуацию не с поверхности Земли, а находясь в вагоне, который движется с ускорением.

В этом случае система отсчёта, относительно которой мы будем анализировать задачу, является неинерциальной, и в ней будут дополнительно возникать силы инерции.

Поэтому применим соответствующую схему решения задач.

Схема решения задач по динамике материальной точки в неинерциальной системе отсчёта

1. Сделайте чертеж к задаче, на котором нарисуйте материальную точку, рассматриваемую в задаче, все силы, действующие на точку, а так же силы инерции, действующие на неё, и укажите направление ускорения точки относительно неинерциальной системы отсчёта.

2. Если материальная точка движется без ускорения относительно неинерциальной системы отсчёта (то есть покоится или движется равномерно и прямолинейно), то запишите уравнение динамики в виде

$$\sum \vec{F}_i + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{кор} = 0.$$

Если точка движется с ускорением $\vec{a}_n$ относительно неинерциальной системы отсчёта, то запишите уравнение динамики в виде

$$\sum \vec{F}_i + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{кор} = m\vec{a}_n.$$

3. Распишите уравнение динамики в проекциях на оси координат, для чего сначала выберите удобную систему координат. Начало координат обычно помещают в рассматриваемой материальной точке, а одну из координатных осей направляют по вектору ускорения этой точки относительно неинерциальной системы отсчёта.

4. Решите полученную систему уравнений.

Первым делом, необходимо определить, какие силы инерции будут действовать на тело в нашей неинерциальной системе отсчёта.

Для этого напомним, в каком случае на тела системы будут действовать силы инерции:

- если неинерциальная система отсчёта движется поступательно с ускорением $\vec{a}$ относительно инерциальной, то на тела системы будет дополнительно действовать сила инерции $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$;

- если неинерциальная система отсчёта вращается вокруг какой-либо оси относительно инерциальной с угловой скоростью ω , то на тела системы будет дополнительно действовать центробежная сила инерции
$$\vec{F}_{цб} = -m\omega^2\vec{r};$$

- если неинерциальная система отсчёта вращается вокруг какой-либо оси относительно инерциальной с угловой скоростью ω , то на все тела, движущиеся относительно неинерциальной системы со скоростью $\vec{v}$, будет дополнительно действовать сила Кориолиса
$$\vec{F}_{кор} = 2m[\vec{\omega}\vec{v}].$$

В нашем случае вагон движется прямолинейно с ускорением $\vec{a}$ относительно инерциальной системы отсчёта (поверхности Земли). Так как вагон при движении не вращается, то центробежная сила $\vec{F}_{цб}$ и сила Кориолиса $\vec{F}_{кор}$ действовать на груз не будут. Отсюда следует, что на наше тело будет дополнительно действовать только сила инерции $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}$, направленная против ускорения вагона относительно Земли.

Так как по условию задачи угол отклонения нити от вертикали α не меняется, следовательно, тело относительно вагона покоится, то есть его ускорение относительно вагона (неинерциальной системы отсчёта) равно нулю $\vec{a}_н = 0$.

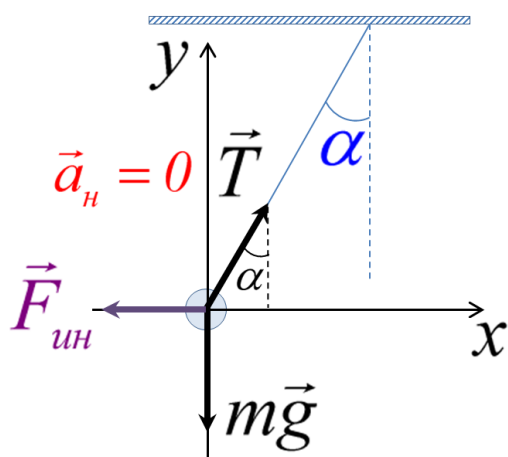


Рис.11.2

Итак, делаем рисунок к задаче относительно неинерциальной системы отсчёта (относительно вагона) (см. рис.11.2).

Запишем основное уравнение динамики для тела относительно неинерциальной системы отсчёта:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_{цб} = 0. \quad (11.4)$$

Распишем уравнение (11.4) на оси координат:

$$\text{OX: } T \sin \alpha - ma = 0$$

$$\text{OY: } T \cos \alpha - mg = 0$$

или

$$\text{OX: } T \sin \alpha = ma \quad (11.5)$$

$$\text{OY: } T \cos \alpha = mg \quad (11.6)$$

Разделим (11.5) на (11.6):

$$\frac{T \sin \alpha}{T \cos \alpha} = \frac{ma}{mg}, \Rightarrow, \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}, \Rightarrow, \alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{g}.$$

Окончательно имеем такой же результат:

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{5,80 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \operatorname{arctg} 0,58 \approx 30^\circ.$$

Ответ: $\alpha \approx 30^\circ$

Задача 12. Тело малых размеров массой 200 г лежит на равномерно вращающемся с частотой 30 об/мин горизонтальном диске. На каком максимальном расстоянии $r_{\max}$ от оси вращения диска может находиться тело, чтобы оно не соскользнуло с диска. Коэффициент трения скольжения тела о диск равен 0,5. **Ответ:** $r_{\max} = 0,5 \text{ м}$

Дано:
 $m = 0,2 \text{ кг}$
 $n = 0,5 \frac{\text{об}}{\text{с}}$
 $\mu = 0,5$

$r_{\max} - ?$

Анализ задачи

Решим эту задачу двумя способами. Рассмотрим данную ситуацию сначала относительно инерциальной системы отсчёта (поверхности Земли), а затем относительно неинерциальной системы отсчёта (относительно вращающегося диска).

Решение Способ №1

Решим задачу по динамике движения материальной точки по окружности относительно инерциальной системы отсчёта (относительно поверхности Земли).

Схема решения задач по динамике равномерного движения материальной точки по окружности

1. Сделайте чертёж к задаче, на котором нарисуйте точку, движущуюся по окружности, все силы, действующие на неё, и направление центростремительного ускорения. Помните, что точка движется равномерно по окружности постоянного радиуса только в том случае, если равнодействующая всех сил, действующих на неё, направлена по радиусу к центру этой окружности. Эта сила сообщает точке центростремительное ускорение, которое так же направлено к центру окружности.

2. Ось ОХ направьте по направлению центростремительного ускорения, то есть к центру окружности, по которой движется материальная точка.

Запишите второй закон Ньютона сначала в векторном виде $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}_{ц.с.}$, а затем в проекциях на оси координат, где

$$a_{ц.с.} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega v.$$

3. Решите полученную систему уравнений.

Определим силы, действующие на тело, вращающееся на горизонтальном диске.

По условию задачи, тело не имеет электрического заряда, не намагничено и по нему не протекает электрический ток. Поэтому электрическое, магнитное и электромагнитное поля на него действовать не будут. Однако тело обладает массой, поэтому на него будет действовать сила тяжести $m\vec{g}$ со стороны гравитационного поля Земли.

Теперь рассмотрим, какие тела действуют на грузик. Это горизонтальный диск с силой реакции опоры $\vec{N}$.

Так как не указана среда, в которой находится грузик, то предполагается, что это вакуум. Следовательно сила Архимеда действовать на тело не будет.

Силами гравитационного притяжения $\vec{F}_{гр}$ к окружающим телам, ввиду их чрезвычайной малости, пренебрегаем.

Итак, делаем рисунок к задаче относительно инерциальной системы отсчёта (поверхности Земли) (см. рис.12.1)

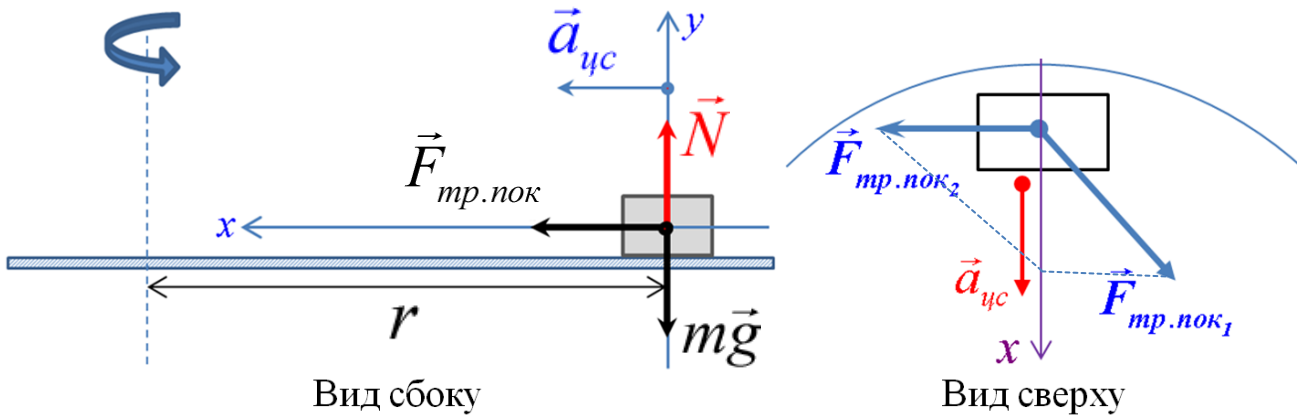


Рис.12.1

Запишем второй закон Ньютона для тела относительно поверхности Земли:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр.пок_1} + \vec{F}_{тр.пок_2} = m\vec{a}_{цс}. \quad (12.1)$$

Распишем уравнение (1) на оси координат:

$$OX: F_{тр.пок} = m\omega^2 r, \quad (12.2)$$

$$OY: N - mg = 0, \quad (12.3)$$

где $\vec{F}_{тр.пок}$ - это результирующая сил трения покоя $\vec{F}_{тр.пок_1}$ и $\vec{F}_{тр.пок_2}$, действующих на тело, которая направлена по радиусу к центру траектории тела.

Из уравнения (12.2) следует, что при максимальном расстоянии r_{max} тела от оси вращения, сила трения покоя будет достигать своего максимального значения $F_{тр.пок}^{max} = \mu N$.

Если расстояние тела от оси вращения диска окажется больше максимального (то есть $r > r_{max}$), то сила трения покоя уже не сможет удержать тело на диске, и оно начнёт с него соскальзывать.

Учтя, что $\omega = 2\pi n$, уравнение (12.2) можно записать в виде

$$\mu N = m4\pi^2 n^2 r_{max}. \quad (12.4)$$

Силу реакции опоры выразим из уравнения (12.3):

$$N = mg. \quad (12.5)$$

Поставив (12.5) в (12.4), получим $r_{max} = \frac{\mu mg}{m4\pi^2 n^2} = \frac{\mu g}{4\pi^2 n^2}.$ (12.6)

Проверим размерность уравнения (12.6): $[r_{max}] = \frac{M}{\cancel{L}^2} \cdot \frac{\cancel{L}^2}{1} = M.$

Окончательно получим
$$r_{\max} = \frac{0,5 \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{4 \cdot 3,14^2 \cdot \left(0,5 \frac{\text{об}}{\text{с}}\right)^2} = 0,5 \text{ м}.$$

Способ № 2

Решим эту задачу относительно системы отсчёта, связанной с вращающимся диском.

Отличие заключается в том, что мы будем рассматривать ситуацию не с поверхности Земли, а находясь на вращающемся диске. В этом случае система отсчёта, относительно которой мы будем анализировать задачу, является неинерциальной, и в ней будут дополнительно возникать силы инерции. Поэтому применим соответствующую схему решения задач.

Схема решения задач по динамике материальной точки в неинерциальной системе отсчёта

1. Сделайте чертеж к задаче, на котором нарисуйте материальную точку, рассматриваемую в задаче, все силы, действующие на точку, а так же силы инерции, действующие на неё, и укажите направление ускорения точки относительно неинерциальной системы отсчёта.
2. Если материальная точка движется без ускорения относительно неинерциальной системы отсчёта (то есть покоится или движется равномерно и прямолинейно), то запишите уравнение динамики в виде

$$\sum \vec{F}_i + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{кор} = 0.$$

Если точка движется с ускорением $\vec{a}_n$ относительно неинерциальной системы отсчёта, то запишите уравнение динамики в виде

$$\sum \vec{F}_i + \vec{F}_{ин} + \vec{F}_{цб} + \vec{F}_{кор} = m\vec{a}_n.$$

3. Распишите уравнение динамики в проекциях на оси координат, для чего сначала выберите удобную систему координат. Начало координат обычно помещают в рассматриваемой материальной точке, а одну из координатных осей направляют по вектору ускорения этой точки относительно неинерциальной системы отсчёта.
4. Решите полученную систему уравнений.

Решение

Первым делом, необходимо определить, какие силы инерции будут действовать на тело в нашей неинерциальной системе отсчёта.

По условию задачи, тело относительно диска покоится, следовательно, его ускорение относительно диска будет равно нулю $\vec{a}_n = 0$.

Диск поступательно не движется, следовательно, сила инерции $\vec{F}_{ин} = -m\vec{a}_н$ действовать на тело не будет.

В нашем случае диск вращается относительно инерциальной системы отсчёта (относительно поверхности Земли). Следовательно, на тело дополнительно будет действовать центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб} = -m\omega^2\vec{r}$.

Так как тело относительно диска покоится, то сила Кориолиса $\vec{F}_{кор} = 2m[\vec{\omega}\vec{v}]$ также возникать не будет.

Таким образом, из всех сил инерции на тело будет действовать только центробежная сила.

Итак, делаем рисунок к задаче относительно неинерциальной системы отсчёта (относительно диска) (см.рис.12.2).

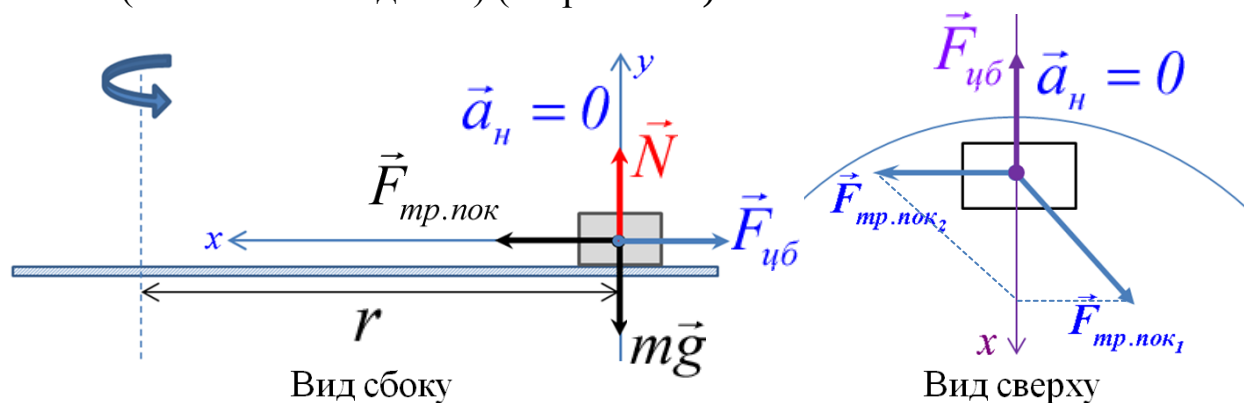


Рис.12.2

Запишем уравнение динамики для тела относительно вращающегося диска (относительно неинерциальной системы отсчёта):

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр.пок_1} + \vec{F}_{тр.пок_2} + \vec{F}_{цб} = 0. \quad (12.7)$$

Распишем уравнение (12.7) на оси координат:

$$OX: F_{тр.пок} - m\omega^2 r = 0 \quad (12.8)$$

$$OY: N - mg = 0 \quad (12.9)$$

С учётом того, что при r_{max} сила трения покоя $F_{тр.пок}^{max} = \mu N$ и $\omega = 2\pi n$, получим

$$OX: \mu N = 4\pi^2 n^2 m r_{max} \quad (12.10)$$

$$OY: N = mg \quad (12.11)$$

$$\text{Поставив (12.11) в (12.10), получим } r_{max} = \frac{\mu mg}{4\pi^2 n^2 m} = \frac{\mu g}{4\pi^2 n^2}. \quad (12.12)$$

Из сравнения уравнения (12.12) с уравнением (12.6) видим, что получился один и тот же результат, как и следовало ожидать.

Ответ: $r_{max} = 0,5\text{ м}$.

3. ГИДРОСТАТИКА

Гидростатикой называется раздел физики, изучающий условия равновесия жидкостей и газов.

Плотностью тела ρ (ро) называется скалярная величина, равная отношению массы этого тела m к его объёму V :

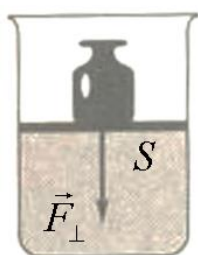
$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Размерность плотности $[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, килограмм на метр в кубе.

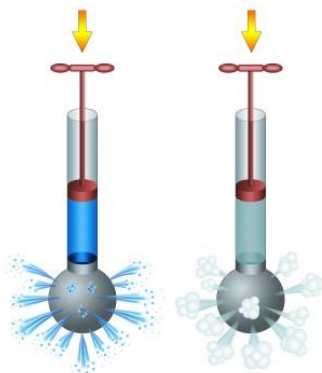
Давлением p (пэ) называется физическая величина, равная отношению силы $F_{\perp}$, действующей перпендикулярно поверхности площадью S , к величине этой поверхности:

$$p = \frac{F_{\perp}}{S},$$

$$[p] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па} - \text{Паскаль}.$$



Сила давления $F_{\perp} = pS$ всегда направлена перпендикулярно поверхности, на которую она действует, не зависимо от её формы.



Закон Паскаля для жидкостей и газов

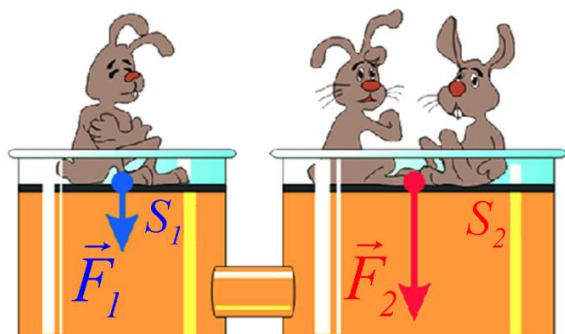
Давление, оказываемое на поверхность несжимаемой жидкости, в состоянии гидростатического равновесия, передается к любой точке жидкости и к стенкам сосуда без изменения.

На законе Паскаля основана работа гидравлического пресса

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1},$$

где F_1 - сила, действующая на поршень площадью S_1 ;

F_2 - сила, действующая на поршень площадью S_2 .



Давление жидкости на глубине h

Наблюдения показывают, что давление в жидкости линейно увеличивается с глубиной по закону:

$$p = \rho gh,$$

Если на поверхность жидкости дополнительно действует внешнее давление (например, атмосферное), то

$$p = p_a + \rho gh,$$

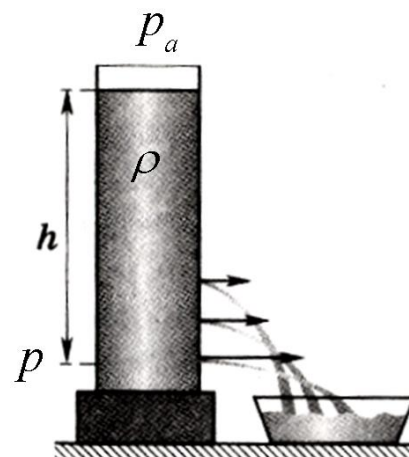
где p - давление в жидкости на глубине h , Па;

p_a - внешнее давление на поверхность жидкости (обычно атмосферное давление), Па;

ρ - плотность жидкости, кг/м³;

g - ускорение свободного падения, м/с²;

h - глубина от поверхности жидкости, м.

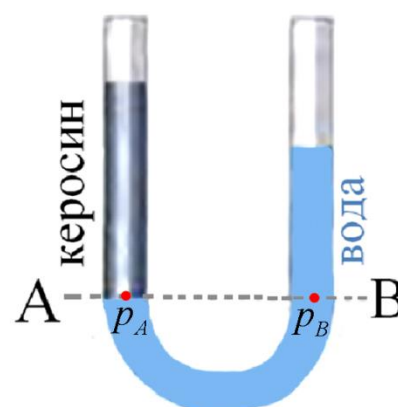


Следствие из закона Паскаля

Внутри жидкости существует давление и на одном и том же горизонтальном уровне в покоящейся жидкости оно одинаково по всем направлениям. С глубиной давление увеличивается.

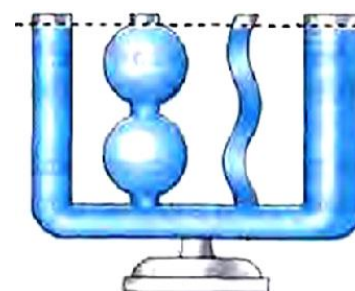
Газы в этом отношении не отличаются от жидкостей, но их плотность и вес малы и «весовое» давление газа во многих случаях можно не учитывать.

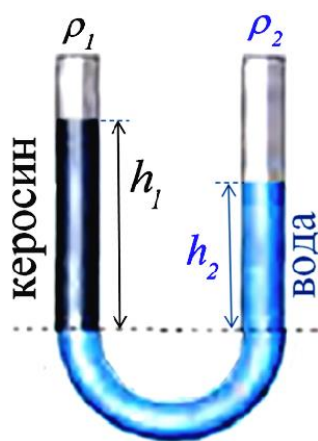
Из закона Паскаля следует, что давление на уровне АВ в обоих коленях трубки одинаково (см. рис), то есть $p_A = p_B$.



Закон сообщающихся сосудов

В сообщающихся сосудах любой формы и сечения однородная жидкость устанавливается всегда на одном и том же горизонтальном уровне.



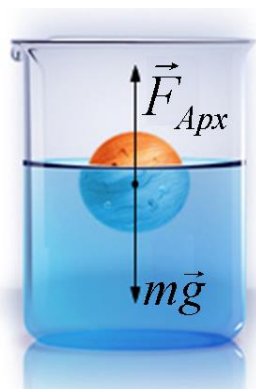


Высоты столбов неоднородных жидкостей обратно пропорциональны их плотностям:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

где h_1 и h_2 - высоты столбов жидкостей;
 ρ_1 и ρ_2 - плотности этих жидкостей.

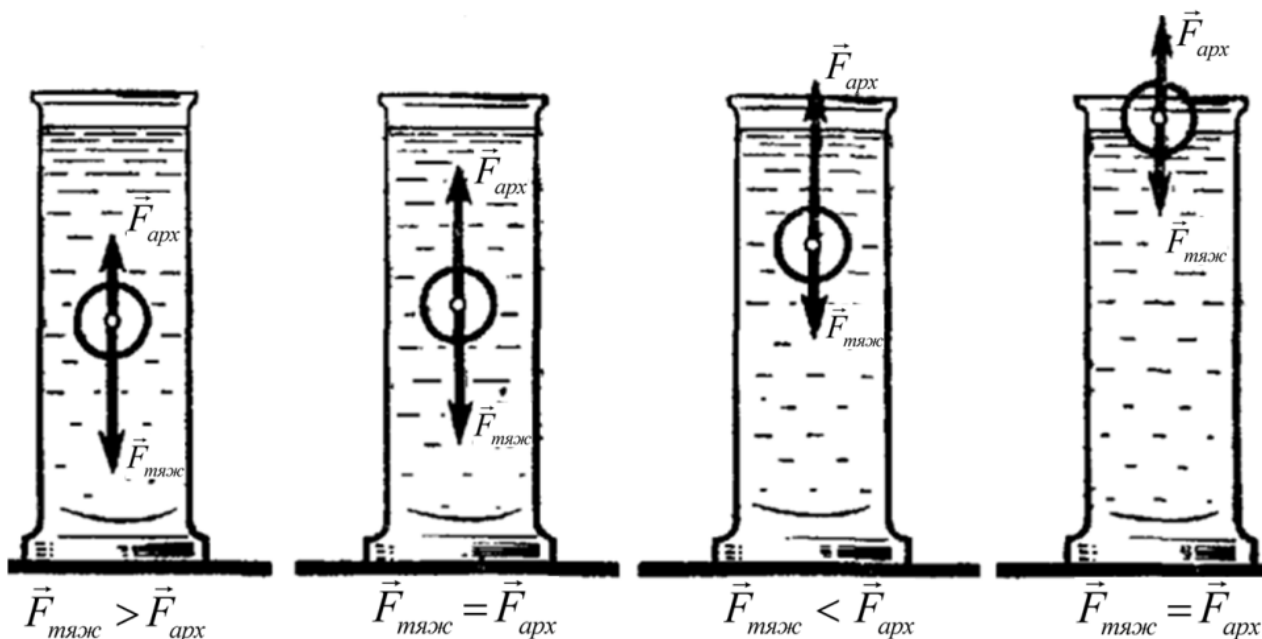
Закон Архимеда



На тело, погружённое в неподвижную жидкость (или газ), действует направленная вертикально вверх выталкивающая сила, равная весу жидкости (или газа) в объёме погружённой части тела.

Условия плавания тел

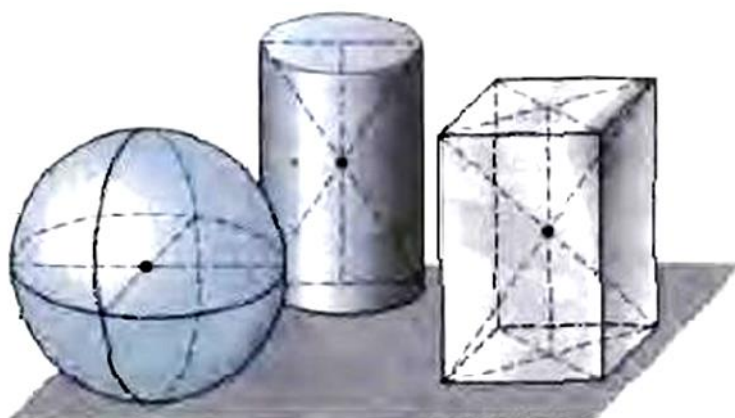
- если $\rho_{\text{тела}} \geq \rho_{\text{жидкости}}$, то тело тонет;
- если $\rho_{\text{тела}} \leq \rho_{\text{жидкости}}$, то тело всплывает;
- если $\rho_{\text{тела}} = \rho_{\text{жидкости}}$, то тело находится во взвешенном состоянии.



Центр масс тела

Координаты центра масс системы материальных точек можно определить по формулам:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$



или

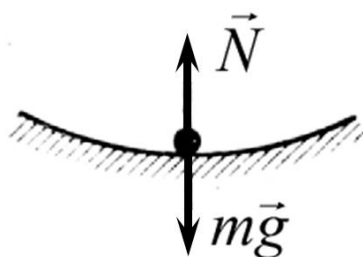
$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i},$$

где m_i - масса i -той материальной точки; x_i, y_i, z_i - её координаты.

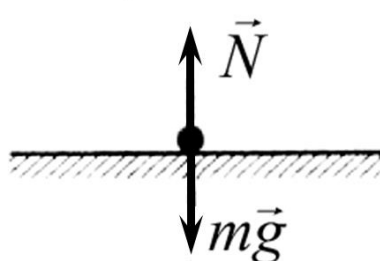
Центр масс однородных симметричных тел совпадает с геометрическим центром тела.

ВИДЫ РАВНОВЕСИЯ

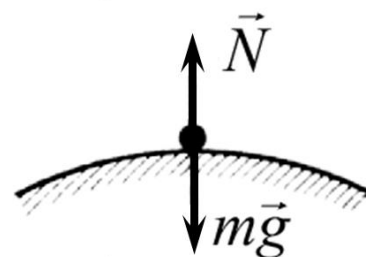
Устойчивое



Безразличное



Неустойчивое

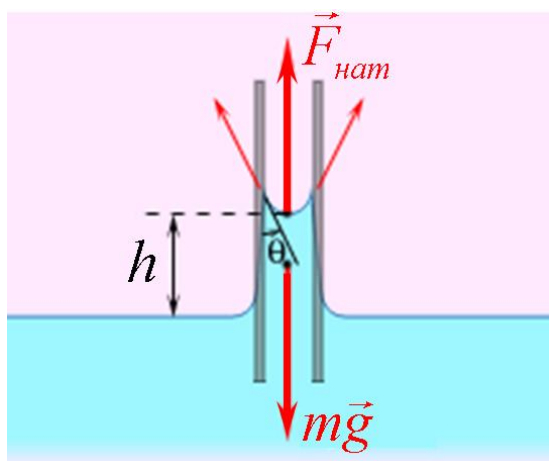


Устойчивым равновесием называется равновесие, при котором тело, выведенное из положения равновесия, возвращается в первоначальное положение.

Неустойчивым равновесием называется равновесие, при котором тело, выведенное из положения равновесия, не возвращается в первоначальное положение.

Безразличным равновесием называется равновесие, при котором соседние положения тела также являются равновесными.

Высота подъёма (глубина опускания) жидкости в капилляре (узкой цилиндрической трубке диаметром $d \leq 1\text{мм}$)



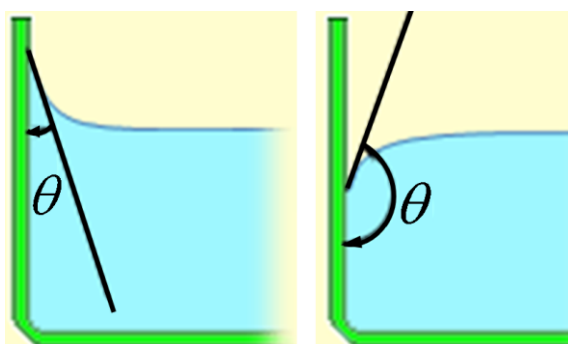
$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R} = \frac{2\sigma}{\rho g r} \cos \theta ,$$

где σ - коэффициент поверхностного натяжения, $\frac{Н}{м}$;

R - радиус кривизны поверхности жидкости, $м$;

r - радиус капилляра, $м$;

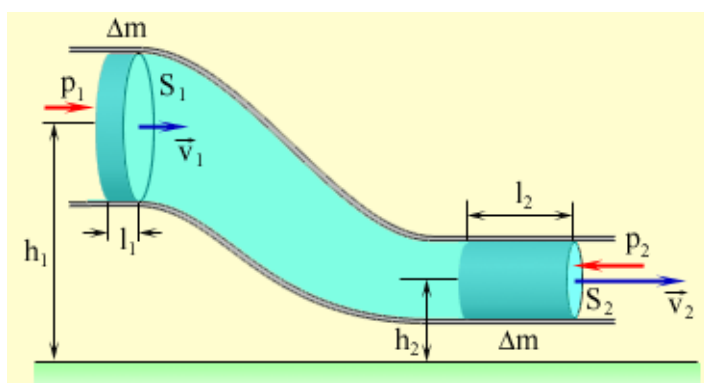
ρ - плотность жидкости, $\frac{кг}{м^3}$; θ (тэта) - краевой угол.



Краевым углом θ называется угол, который образуется между касательной, проведённой к поверхности раздела жидкости и газа, а так же жидкости и твёрдой поверхности с вершиной, располагающейся в точке контакта трёх фаз, и условно измеряемый всегда вовнутрь жидкости.

Закон Бернулли для идеальной жидкости

Сумма статического давления p , давления обусловленного весом жидкости $\rho g h$, и динамического давления $\frac{\rho v^2}{2}$ в идеальной жидкости не изменяется с течением времени вдоль любой трубки тока:



$$p + \rho g h + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const} ,$$

где p - статическое давление;

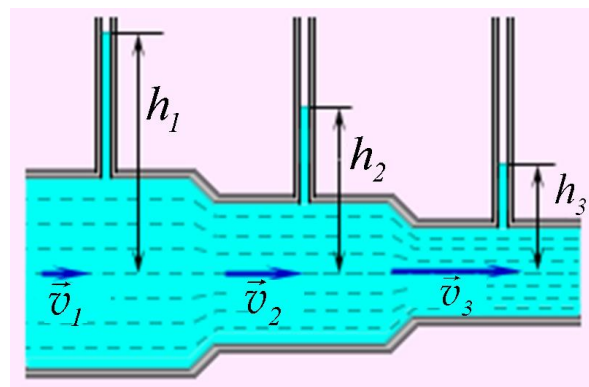
$\rho g h$ - гидростатическое давление;

$\frac{\rho v^2}{2}$ - динамическое давление.

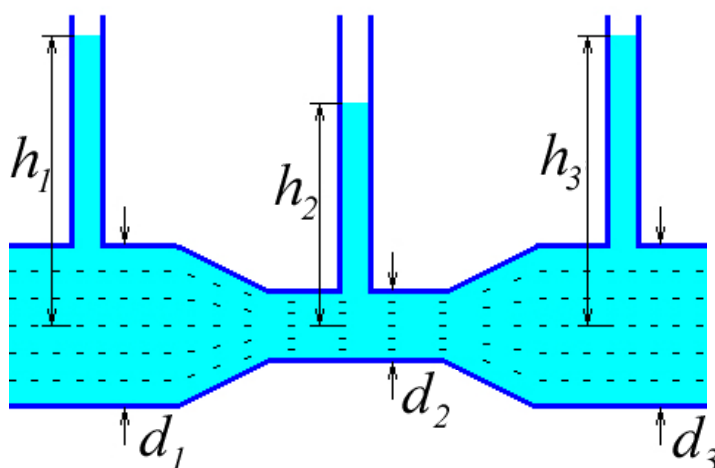
Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости.

Произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока:

$$\Delta V = S_1 v_1 t = S_2 v_2 t \text{ или } Sv = \text{const.}$$



При течении жидкости (газа) по горизонтальной трубке, имеющей различные сечения, скорость жидкости (газа) больше в местах сужения, а статическое давление больше в более широких местах, то есть там, где скорость течения меньше.



Гидростатический парадокс

Свойством жидкости передавать во все стороны производимое на неё давление объясняется явление, известное в физике под названием «**гидростатический парадокс**»:

сила, с которой жидкость давит на дно сосуда, не зависит от формы сосуда и равна весу вертикального столба, основанием которого является дно сосуда, а высотой – высота столба жидкости.

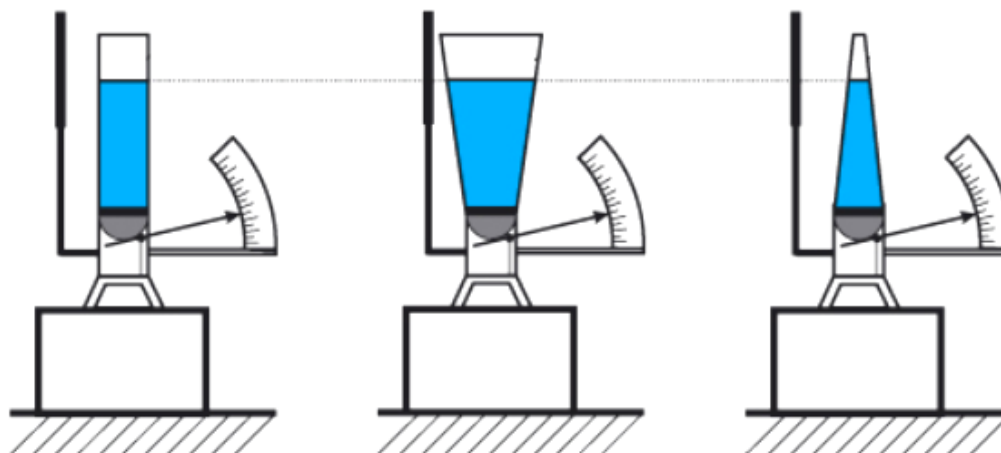
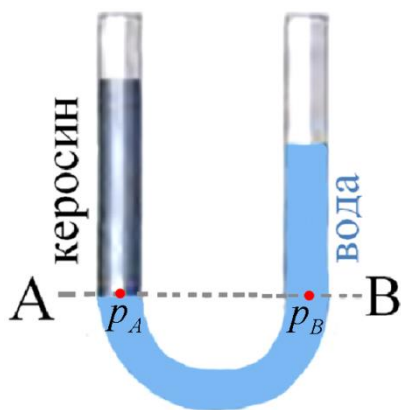


Схема решения задач на применение законов гидростатики

1. Сделайте рисунок к задаче, на котором покажите все равновесные уровни жидкости, которые она занимала в разных состояниях, и изобразите границы раздела различных жидкостей.
2. Выберите нулевой горизонтальный уровень отсчёта высоты столбов различных жидкостей (обычно его выбирают так, чтобы он проходил по нижней границе раздела сред).
3. запишите условие равновесия жидкости в виде



$$p_A = p_B,$$

где p_A и p_B - суммарное давление внутри жидкости в точках А и В, расположенных на одном и том же горизонтальном уровне в жидкости.

Если сверху на данный уровень давит несколько жидкостей, то давление на данном уровне равно сумме давлений каждой жидкости в отдельности, то есть необходимо записать

$$p_0 + \rho_1 g h_1 + \dots + \rho_i g h_i = p'_0 + \rho_1 g h'_1 + \dots + \rho_i g h'_i,$$

где p_0 и p'_0 - внешнее давление на поверхности верхних слоёв жидкости в разных коленах (обычно оно равно атмосферному давлению), ρ_i и h_i - плотность и высота i -ой жидкости.

4. Если до установления равновесия происходило переливания жидкости из одной части в другую, то к условию равновесия следует добавить условие не сжимаемости жидкости: $\Delta V_1 = \Delta V_2$, где ΔV_1 - уменьшение объёма жидкости в одной части сосуда, а ΔV_2 - увеличение объёма жидкости в другой части сосуда.
5. Решите полученную систему уравнений.

При решении задач на гидростатику следует помнить, что среднюю силу $\langle F \rangle$ давления на плоскую боковую поверхность сосуда можно определить по формуле:

$$\langle F \rangle = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{p_1 S + p_2 S}{2} = \frac{0 + \rho g h}{2} S = \frac{\rho g h}{2} S.$$

Если в задаче требуется найти вес тела P в жидкости или газе, то следует помнить, что вес тела в жидкости равен весу тела в воздухе минус сила Архимеда, действующая на тело в жидкости.

Иногда при определении веса тела в жидкости, его удобно изобразить подвешенным на нити в жидкости или газе и помнить, что по третьему закону Ньютона вес тела равен по величине силе натяжения нити $|\vec{P}| = |\vec{T}|$.

Если требуется определить минимальную работу A_{min} , необходимую для того, чтобы вынуть тело из жидкости (или, наоборот, погрузить тело полностью в жидкость), то при определении работы необходимо брать среднее значение силы, совершающей эту работу, на всём участке перемещения центра тяжести тела.

Если тело плавает на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей, то сила Архимеда, действующая на тело равна

$$F_{арх} = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2,$$

где ρ_1 и ρ_2 - плотность первой и второй жидкости;

V_1 и V_2 - объёмы частей тела, погруженные в первую и вторую жидкость.

Если требуется найти подъёмную силу, действующую на тело, то требуется найти разность между выталкивающей силой и силой тяжести.

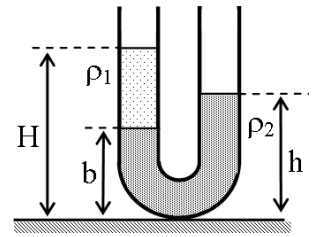
Примеры решения задач по гидростатике

Задача 13: В широкую U - образную трубку с вертикальными прямыми коленами налиты неизвестная жидкость

плотностью ρ_1 и вода плотностью $\rho_2 = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

(см. рисунок). На рисунке $b = 10 \text{ см}$, $h = 24 \text{ см}$,

$H = 30 \text{ см}$. Чему равна плотность ρ_1 неизвестной



жидкости. Атмосферное давление равно p_a . **Ответ:** $\rho_1 = 700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

Дано:

$$\rho_2 = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$b = 0,10 \text{ м}$$

$$h = 0,24 \text{ м}$$

$$H = 0,30 \text{ м}$$

$$p_a$$

$$\rho_1 - ?$$

Анализ задачи

Так как речь в задаче идёт о стационарном состоянии жидкостей, то это задача на гидростатику. Поэтому для её решение применим соответствующую схему решения задач.

Схема решения задач на применение законов гидростатики

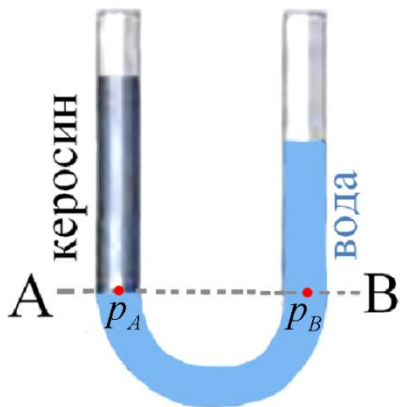
1. Сделайте рисунок к задаче, на котором покажите все равновесные уровни жидкости, которые она занимала в разных состояниях, и изобразите границы раздела различных жидкостей.

2. Выберите нулевой горизонтальный уровень отсчёта высоты столбов различных жидкостей (обычно его выбирают так, чтобы он проходил по нижней границе раздела сред).

3. Запишите условие равновесия жидкости в виде

$$p_A = p_B,$$

где p_A и p_B - суммарное давление внутри жидкости в точках А и В, расположенных на одном и том же горизонтальном уровне в жидкости.



Если сверху на данный уровень давит несколько жидкостей, то давление на данном уровне равно сумме давлений

каждой жидкости в отдельности, то есть необходимо записать

$$p_0 + \rho_1 g h_1 + \dots + \rho_i g h_i = p'_0 + \rho_1 g h'_1 + \dots + \rho_i g h'_i,$$

где p_0 и p'_0 - внешнее давление на поверхности верхних слоёв жидкости в разных коленах (обычно оно равно атмосферному давлению); ρ_i и h_i - плотность и высота i -ой жидкости.

4. Если до установления равновесия происходило переливания жидкости из одной части в другую, то к условию равновесия следует добавить условие не сжимаемости жидкости: $\Delta V_1 = \Delta V_2$, где ΔV_1 - уменьшение объёма жидкости в одной части сосуда, а ΔV_2 - увеличение объёма жидкости в другой части сосуда.

5. Решите полученную систему уравнений.

Решение

Итак, согласно пунктам 1 и 2 схемы решения задач, делаем рисунок по условию задачи и выбираем нулевой уровень отсчёта высоты столба жидкостей (см. рис.13.1).

Запишем условие равновесия жидкостей над этим уровнем:

$$p_A = p_B. \quad (13.1)$$

Распишем уравнение (13.1) согласно рис.13.1:

$$p_a + \rho_1 g h_1 = p_a + \rho_2 g h_2,$$

где $h_1 = H - b$ и $h_2 = h - b$.

Тогда

$$p_a + \rho_1 g (H - b) = p_a + \rho_2 g (h - b),$$

$$\Rightarrow, \rho_1 g (H - b) = \rho_2 g (h - b), \Rightarrow,$$

$$\rho_1 = \frac{\rho_2 (h - b)}{H - b}. \quad (13.2)$$

Проверим размерность уравнения (13.2).

$$\left[\frac{\rho_2}{\rho_1} \right] = \frac{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} (m - m)}{m - m} = \frac{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cancel{m}}{\cancel{m}} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Размерность совпала, поэтому подставим в уравнение (13.2) данные из условия задачи, получим

$$\rho_1 = \frac{10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} (0,24m - 0,1m)}{0,3m - 0,1m} = 700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

$$\text{Ответ: } \rho_1 = 700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

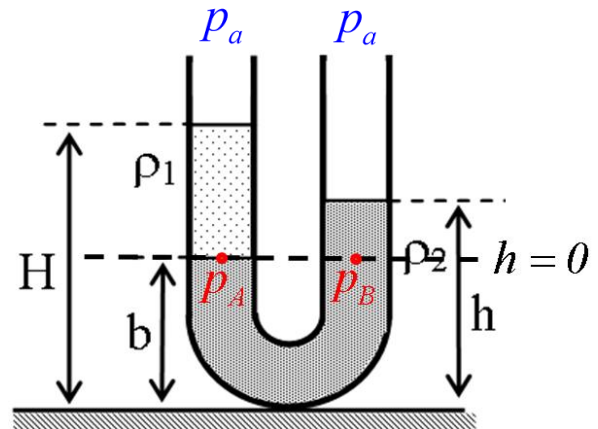
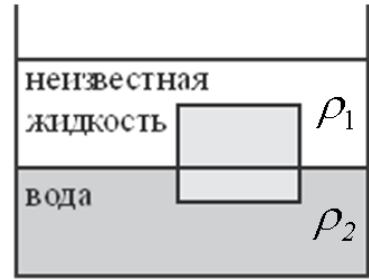


Рис.13.1

Задача 14: Сплошной кубик с ребром $a = 10 \text{ см}$ плавает на границе раздела воды плотностью $\rho_2 = 1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ и неизвестной жидкости, плотность которой ρ_1 меньше плотности воды, погружаясь в воду на глубину $h = 20 \text{ мм}$. Плотность вещества, из которого изготовлен кубик, равна $\rho = 840 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Свободная поверхность неизвестной жидкости располагается выше, чем верхняя поверхность кубика. Определите плотность неизвестной жидкости ρ_1 .

Ответ: $\rho_1 = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$



Дано:
 $a = 0,1 \text{ м}$
 $h = 0,02 \text{ м}$
 $\rho_2 = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
 $\rho = 840 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

 $\rho_1 = ?$

Анализ задачи

По условию задачи кубик находится в равновесии. Поэтому применим схему решения задач по динамике поступательного движения твёрдого тела.

Схема решения задач по динамике материальной точки или поступательного движения абсолютно твёрдого тела

1. Сделайте чертеж к задаче, на котором нарисуйте тела, рассматриваемые в задаче, все силы, действующие на каждое тело, и укажите направления

ускорений этих тел.

2. Если тело движется без ускорения (то есть покоится или движется равномерно и прямолинейно), то запишите для него первый закон Ньютона в виде $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$.

Если тело движется с ускорением, то запишите для него второй закон Ньютона в виде $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = m\vec{a}$.

3. Для каждого тела распишите закон Ньютона в проекциях на оси координат, для чего сначала

- для каждого тела выберите удобную систему координат. Начало координат обычно помещают в рассматриваемой материальной точке или в центре тяжести тела, а одну из координатных осей направляют по вектору ускорения этого тела;

- для каждого тела распишите своё векторное уравнение в проекциях на оси координат с учётом знаков проекций сил.

4. Решите полученную систему уравнений.

Решение

Делаем рисунок, на котором обозначаем все заданные по условию задачи величины.

Теперь рисуем все действующие на кубик силы.

По условию задачи, кубик не имеет электрического заряда, не намагничено и по нему не протекает электрический ток. Поэтому электрическое, магнитное и электромагнитное поля на него действовать не будут. Однако кубик обладает массой, поэтому на него будет действовать сила тяжести $m\vec{g}$ со стороны гравитационного поля Земли.

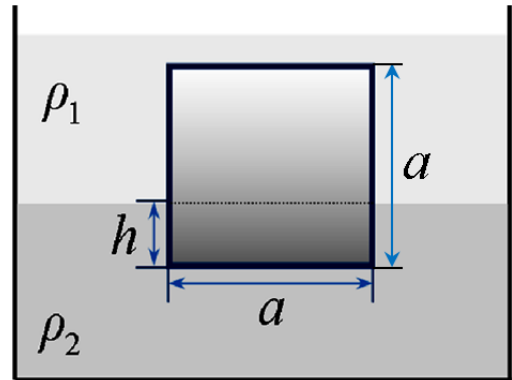


Рис. 14.1

Кубик находится в жидкости, поэтому на него будет действовать сила Архимеда. При этом учтём, что если тело плавает на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей, то результирующая выталкивающая сила, равна сумме сил Архимеда, действующих на кубик со стороны каждой жидкости:

$$F_{арх} = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2,$$

где ρ_1 и ρ_2 - плотность первой и второй жидкости;

V_1 и V_2 - объёмы частей тела, погруженные в первую и вторую жидкость.

Силами гравитационного притяжения $\vec{F}_{гp}$ к окружающим телам, ввиду их чрезвычайной малости, пренебрегаем.

Так как тело находится в состоянии покоя, то запишем для него первый закон Ньютона:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{арх_1} + \vec{F}_{арх_2} = 0. \quad (14.1)$$

Спроецируем уравнение (1) на ОУ:

$$\rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2 - mg = 0. \quad (14.2)$$

Из рис.14.1 имеем

$$V_1 = a^2 (a - h), \quad (14.3)$$

$$V_2 = a^2 h, \quad (14.4)$$

$$m = V\rho = a^3 \rho. \quad (14.5)$$

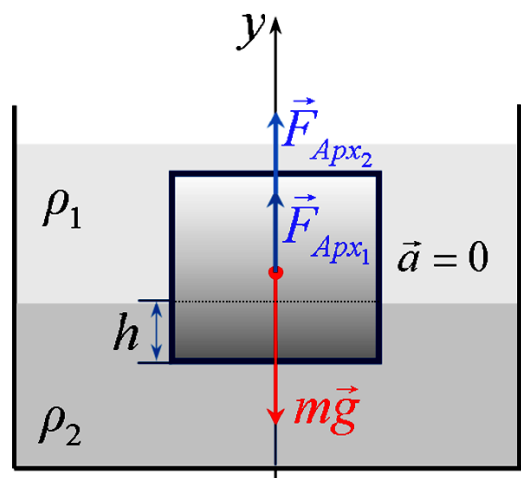


Рис. 14.2

Подставим уравнения (14.3) - (14.5) в (14.2):

$$\rho_1 g a^2 (a - h) + \rho_2 g a^2 h - a^3 \rho g = 0, \text{ следовательно,}$$

$$\rho_1 = \frac{a^3 \rho g - \rho_2 g a^2 h}{g a^2 (a - h)} = \frac{g a^2 (a \rho - \rho_2 h)}{g a^2 (a - h)} = \frac{a \rho - \rho_2 h}{a - h}. \quad (14.6)$$

Проверим размерность уравнения (14.6).

$$\left[\frac{\kappa \mathcal{Z}}{\mathcal{M}^3} \right] = \frac{\mathcal{M} \cdot \frac{\kappa \mathcal{Z}}{\mathcal{M}^3} - \frac{\kappa \mathcal{Z}}{\mathcal{M}^3} \cdot \mathcal{M}}{\mathcal{M} - \mathcal{M}} = \frac{\mathcal{M} \cdot \frac{\kappa \mathcal{Z}}{\mathcal{M}^3}}{\mathcal{M}} = \frac{\kappa \mathcal{Z}}{\mathcal{M}^3}.$$

Подставив в (14.6) данные из условия задачи, получим

$$\rho_1 = \frac{0,1\mathcal{M} \cdot 840 \frac{\kappa \mathcal{Z}}{\mathcal{M}^3} - 1000 \frac{\kappa \mathcal{Z}}{\mathcal{M}^3} \cdot 0,02\mathcal{M}}{0,1\mathcal{M} - 0,02\mathcal{M}} = 800 \frac{\kappa \mathcal{Z}}{\mathcal{M}^3}.$$

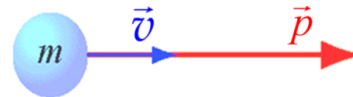
Ответ: $\rho_1 = 800 \frac{\kappa \mathcal{Z}}{\mathcal{M}^3}.$

4. ИМПУЛЬС. РАБОТА. МОЩНОСТЬ. КПД. ВИДЫ ЭНЕРГИИ

Импульс материальной точки

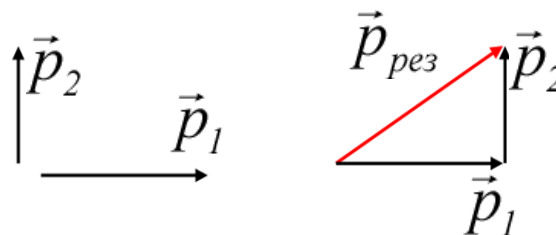
Импульсом материальной точки $\vec{p}$ (пэ) называется векторная величина, равная произведению массы m этой точки на её скорость $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m \vec{v}, \quad [p] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} = \text{Н} \cdot \text{с} \text{ (Ньютон-секунда)}$$



Импульсом системы материальных точек $\vec{p}_{\text{сист}}$ называется векторная величина, равная векторной сумме импульсов всех тел системы:

$$\vec{p}_{\text{системы}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \sum \vec{p}_i$$



Импульсом силы $\vec{I}$ (и) называется векторная величина, равная произведению силы $\vec{F}$ на время её действия t :

$$\vec{I} = \vec{F} t,$$

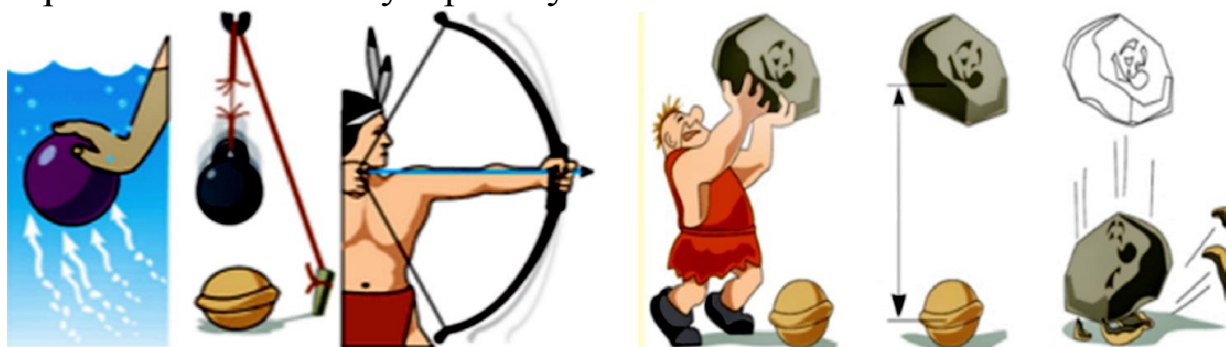
$$[\vec{I}] = \text{Н} \cdot \text{с} \text{ (Ньютон-секунда)}.$$

Энергия

Механическая энергия физических объектов и явлений

Физический объект, явление	Энергия, Дж	Физический объект, явление	Энергия, Дж
Молекула воздуха при комнатной температуре	10^{-21}	Атомная бомба	10^{14}
Электрон в атоме	10^{-18}	Ураган	10^{15}
Деление ядра урана	10^{-11}	100 МВт-водородная бомба	10^{17}
Протон в ускорителе, прыгающая блоха	10^{-7}	Землетрясение (8 баллов по шкале Рихтера)	10^{18}
Клавиша компьютера	10^{-2}	Извержение вулкана	10^{19}
Сердцебиение	0,5	Солнечное излучение, ежегодно попадающее на Землю	10^{25}
Яблоко, падающее с высоты 1 м	1		
Горящая спичка	10^3	Вращение Земли вокруг оси	10^{29}
Стайер после часового бега, взрыв 1 кг тринитротолуола	10^6	Движение Земли вокруг Солнца	10^{33}
Сгорание 1 л бензина	10^7	Солнечное излучение за год	10^{34}
Сгорание 1 м ³ дров	10^9	Взрыв сверхновой звезды	10^{44}
Разряд молнии	10^{10}	Излучение радиогалактики	10^{55}
Космическая ракета	10^{11}	Рождение Вселенной	10^{68}

Когда говорят, что тело обладает механической энергией, то подразумевают, что оно при определённых условиях может совершить механическую работу.



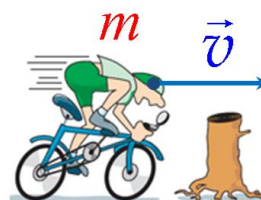
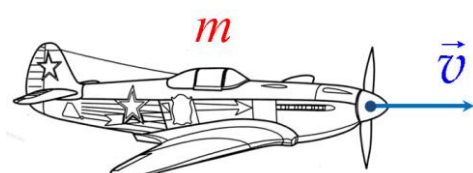
Виды механической энергии

Кинетической энергией тела T (тэ) называется скалярная величина, равная половине произведения массы этого тела m на квадрат его скорости v^2 :

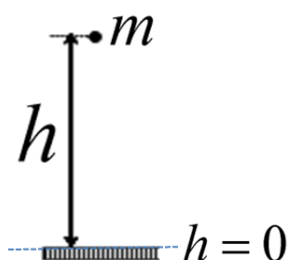
$$T = \frac{mv^2}{2},$$

где T - кинетическая энергия, Дж; m - масса тела, кг;
 v - скорость тела, м/с.

особенность: кинетическая энергия тела всегда величина положительная.



Виды потенциальной энергии



Потенциальной энергией поднятой над Землёй материальной точки Π (пэ) называется скалярная величина, равная произведению массы материальной точки m на ускорение свободного падения g и на высоту h от нулевого уровня отсчёта потенциальной энергии:

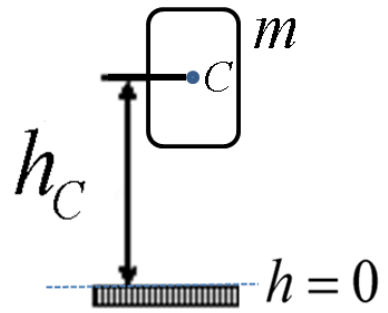
$$\Pi = mgh,$$

где Π – потенциальная энергия, Дж;

m – масса, кг; g – ускорение свободного падения, м/с²;

h – высота материальной точки над нулевым уровнем отсчёта потенциальной энергии, м.

Потенциальной энергией поднятого над Землёй протяжённого тела Π (пэ) называется скалярная величина, равная произведению массы тела m на ускорение свободного падения g и на высоту h_c центра тяжести тела от нулевого уровня отсчёта потенциальной энергии:



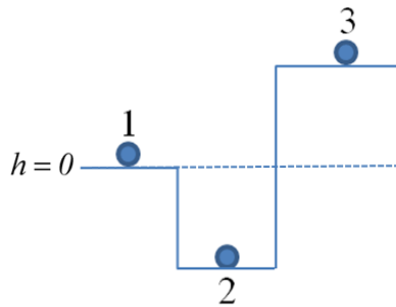
$$\Pi = mgh_{\text{цт}},$$

где Π - потенциальная энергия, Дж;

m (эм) - масса, кг; g (жэ) - ускорение свободного падения, м/с^2 ;

h_c (аш) - высота центра тяжести тела над нулевым уровнем отсчёта потенциальной энергии, м.

особенность: может быть величиной положительной, отрицательной или равной нулю, в зависимости от выбора начального уровня отсчёта потенциальной энергии.



$\Pi_1 = 0$, так как $h = 0$

$\Pi_2 < 0$, так как $h < 0$

$\Pi_3 > 0$, так как $h > 0$

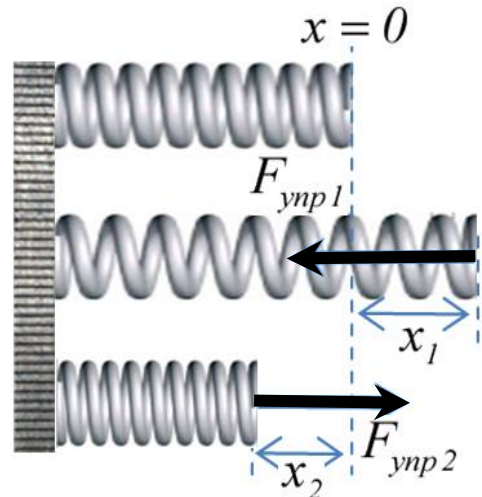
Потенциальной энергией деформированной пружины Π (пэ) называется скалярная величина, равная половине произведения жёсткости пружины k на квадрат величины её деформации x^2 :

$$\Pi = \frac{kx^2}{2},$$

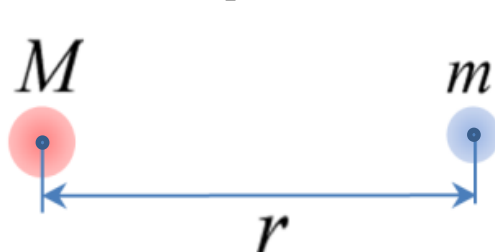
где k - коэффициент жёсткости

пружины, $\frac{\text{Н}}{\text{м}}$;

x - величина деформации пружины, м.



Потенциальной энергией гравитационного взаимодействия двух материальных точек Π (пэ) называется скалярная величина, равная произведению гравитационной постоянной G на произведение масс материальных точек M и m , делённому на расстояние r между этими материальными точками:



$$\Pi = -G \frac{Mm}{r},$$

где G (жэ)- гравитационная постоянная;
 M и m - массы материальных точек, кг;
 r - расстояние между ними, м.

Полной механической энергией E (е) называется скалярная величина, равная сумме кинетической T и потенциальной Π энергий тела:

$$E = T + \Pi.$$

$$[E] = \text{Дж}.$$

Консервативные силы

Консервативными (или потенциальными) называются силы, работа которых не зависит от формы траектории, по которой двигалась материальная точка, а определяется лишь начальным и конечным положением точки, и, как следствие, работа таких сил на любом замкнутом участке пути равна нулю.

К консервативным силам относятся сила гравитации $\vec{F}_{гр}$, сила тяжести $\vec{F}_{тяж}$, сила упругости $\vec{F}_{упр}$, сила Кулона $\vec{F}_{кул}$ и сила Архимеда $\vec{F}_{арх}$.

Все остальные силы являются неконсервативными.

Связь консервативной силы с её потенциальной энергией

$$\vec{F} = -\frac{d\Pi}{d\vec{r}} = -\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Pi}{\partial z}\vec{k}\right) = -grad \Pi,$$

где $grad = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ - градиент (это математический оператор, равный в декартовой системе координат сумме первых частных производных какой-либо функции по координатам x, y и z).

Механическая работа A

Механической работой $A(a)$ постоянной по величине и направлению силы называется скалярная величина, равная произведению силы F (эф) на перемещение S (эс) точки приложения силы и на косинус угла α (альфа) между векторами силы и перемещения:

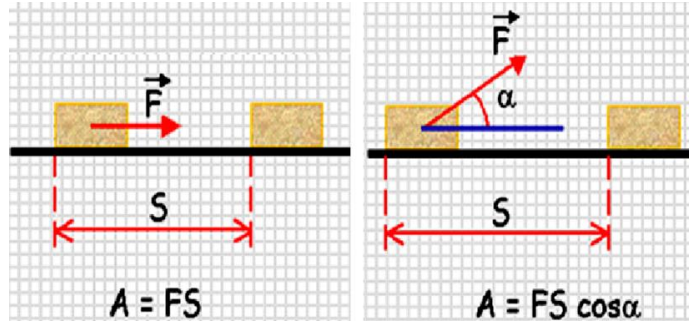
$$A = FS \cos \alpha,$$

где A – работа силы, Дж;

F – сила, Н;

S – перемещение, м;

α – угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{S}$.

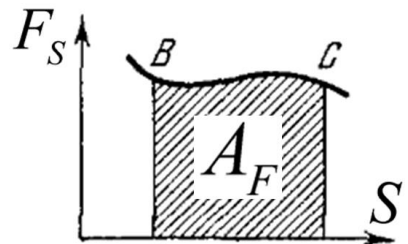


Механической работой A произвольной силы называется скалярная величина, равная криволинейному интегралу вида

$$A_{1-2} = \int_1^2 F_s ds.$$

Геометрический смысл механической работы

Механическую работу силы можно определить графически, как площадь фигуры под кривой графика зависимости силы F_s , действующей на тело, от пройденного телом пути S .



Механическая мощность силы N

Для характеристики быстроты выполнения работы ввели понятие механической мощности.

Различают среднюю $\langle N \rangle$ и мгновенную N механическую мощность.

Средней механической мощностью силы $\langle N \rangle$ (эН) называется скалярная величина, равная отношению работы силы A за какой-то промежуток времени t , к величине этого промежутка времени:

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t},$$

где $[N] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}$, Ватт – механическая мощность силы;

A – механическая работа силы, Дж; t – время выполнения работы, с.

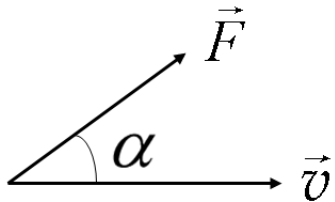


Мгновенной механической мощностью силы N (Эн) называется скалярная величина, равная первой производной работы силы A по времени t :

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Мгновенную мощность силы можно выразить через скорость движущегося под действием этой силы тела:

$$N = Fv \cos \alpha,$$



где v – это мгновенная скорость тела (т.е. скорость тела в данный момент времени), м/с;

α – угол между векторами силы $\vec{F}$ и скорости $\vec{v}$.

Коэффициент полезного действия η

Для характеристики экономичности механизмов или процессов ввели понятие *коэффициента полезного действия η (эта)*.

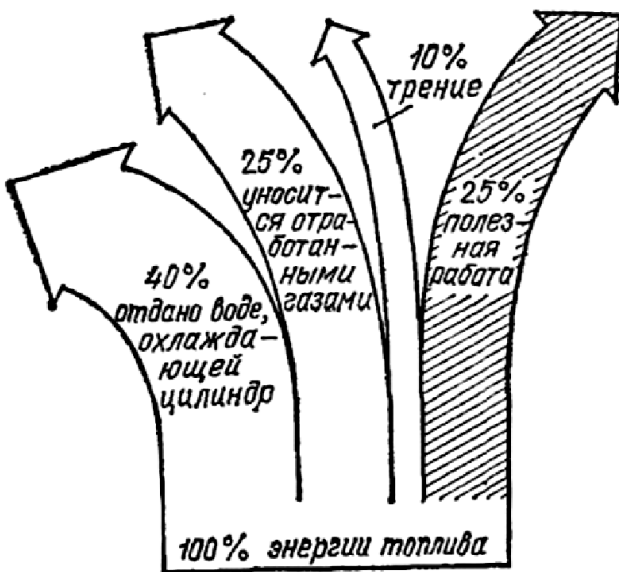
Коэффициентом полезного действия η (КПД) называется скалярная величина, равная отношению полезной работы механизма $A_{\text{полезная}}$, к его затраченной работе $A_{\text{затраченная}}$:

$$\eta = \frac{A_{\text{полезная}}}{A_{\text{затраченная}}},$$

где $A_{\text{полезная}}$ и $A_{\text{затр}}$ – это полезная и затраченная работа силы соответственно;

η (эта) - КПД, величина безразмерная.

КПД не может быть больше единицы или больше 100 %.



При этом следует помнить, что **полезная работа $A_{\text{полезная}}$** – это минимальная работа, которую необходимо совершить, чтобы выполнить необходимое задание.

Полезная работа будет минимальной, если тело перемещать равномерно прямолинейно в отсутствии сил трения и сопротивления).

А затраченная работа $A_{\text{затр}}$ – это работа, которую на самом

деле приходится совершить, чтобы выполнить данное задание.

Например, при подъёме тела по наклонной плоскости на высоту h , полезная работа будет совершаться против силы тяжести. При этом работа будет минимальной, если тело перемещать равномерно и силы трения будут отсутствовать. В этом случае полезная работа будет равна $A_{\text{полезная}} = mgh$, а затраченная работа $A_{\text{затр}} = FS \cos \alpha$.

Схема решения задач на определение механической работы

1. Установите, работу какой силы необходимо определить (это может быть как отдельная сила, так и результирующая многих сил).

2. Работу силы можно определить несколькими способами.

- по формуле работы механической силы:

в случае постоянной силы $A = FS \cos \alpha$,

в случае переменной силы $A_{1-2} = \int_1^2 F_s ds$ или $A = \int_{t_1}^{t_2} N dt$,

где N - мгновенная мощность силы,

- по теореме о кинетической энергии:

$$\sum A_i = T_2 - T_1,$$

- по теореме о потенциальной энергии:

$$A_{\text{конс}} = -(P_2 - P_1),$$

- по закону изменения полной механической энергии:

$$\sum A_i^{\text{неконсервативных}} = E_2 - E_1.$$

3. По ходу решения может понадобиться определить угол α между векторами силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{S}$. В этом случае делается рисунок, на котором указывается сила, вектор перемещения и определяется необходимый угол α .

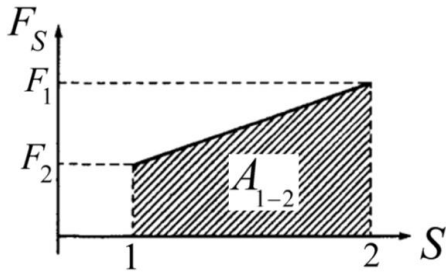
4. При вычислении работы переменной силы (например, $F_{\text{упр}}$, $F_{\text{гр}}$ или $F_{\text{кул}}$) формулой $A = FS \cos \alpha$ пользоваться нельзя. В этом случае работу силы можно найти следующим образом:

- если сила при перемещении меняется по линейному закону (например, $F_{\text{упр}} = kx$), то работу силы можно определить по формуле

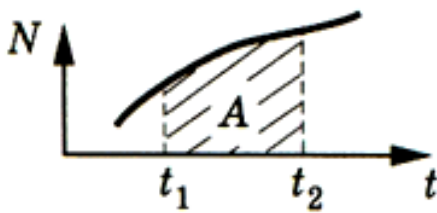
$$A = \langle F \rangle S \cos \alpha, \text{ где } \langle F \rangle = \frac{F_1 + F_2}{2} - \text{среднее значение переменной}$$

силы в начале и конце перемещения;

- если даны графики зависимости силы F_S , действующей на тело, от пройденного телом пути S или мгновенной мощности силы N от времени t , то можно использовать *геометрический смысл интеграла*.



Работа силы A равна площади фигуры под кривой графика зависимости силы F_S , действующей на тело, от пройденного телом пути S .



Работа силы A равна площади фигуры под кривой графика зависимости мгновенной мощности силы N от времени t .

При вычислении потенциальной энергии протяжённого тела, необходимо определить высоту его центра тяжести $h_{цм}$. Следует помнить, что центр тяжести у однородного симметричного тела совпадает с его геометрическим центром.

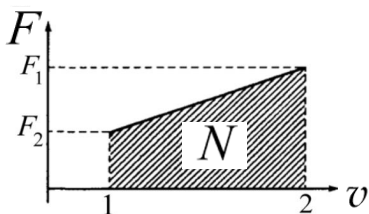
Схема решения задач на определение механической мощности

Прежде всего, надо разобраться, какую мощность требуется определить: среднюю или мгновенную.

- среднюю мощность можно определить по формулам

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t} \quad \text{или} \quad \langle N \rangle = \int_{v_1}^{v_2} F dv;$$

- среднюю мощность можно определить, используя *геометрический смысл интеграла*.



Средняя мощность силы $\langle N \rangle$ равна площади фигуры под кривой графика зависимости силы F , действующей на тело, от мгновенной скорости тела v ;

- мгновенная мощность определяется по формулам

$$N = \frac{dA}{dt} \quad \text{или} \quad N = Fv \cos \alpha,$$

где v - это мгновенная скорость тела;

α - угол между векторами силы $\vec{F}$ и мгновенной скорости тела $\vec{v}$.

Схема решения задач на определение коэффициента полезного действия

При определении КПД рекомендуется начинать решение задачи с определяющей формулы $\eta = \frac{A_{\text{полезная}}}{A_{\text{затраченная}}}$, при этом следует внимательно разобраться, какая работа в данной задаче является полезной $A_{\text{полезная}}$, а какая затраченной $A_{\text{затр}}$.

Напомним, что

полезная работа $A_{\text{полезная}}$ – это минимальная работа, которую необходимо совершить, чтобы выполнить необходимое задание (работа будет минимальной, если тело перемещать равномерно прямолинейно и силы трения будут отсутствовать), а

затраченная работа $A_{\text{затр}}$ – это работа, которую на самом деле приходится совершить, чтобы выполнить данное задание.

Затраченная работа находится по формулам

$$A = FScos\alpha \quad \text{или} \quad A_{1-2} = \int_1^2 F_s ds.$$

Примеры решения задач

Задача 15. Какую работу совершает сила $F = 20 \text{ Н}$, подняв по наклонной плоскости груз массой $m = 2 \text{ кг}$ на высоту $h = 250 \text{ см}$ с ускорением $a = 500 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$. Сила действует параллельно наклонной плоскости. Трением тела о плоскость и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $A_F = 100 \text{ Дж}$

Дано:
 $F = 20 \text{ Н}$
 $m = 2 \text{ кг}$
 $h = 2,5 \text{ м}$
 $a = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$

 $A_F - ?$

Анализ задачи

Работу силы F можно найти, используя формулу-определение. Однако, прежде чем её применять, необходимо определить характер изменения этой силы. Если эта сила F остаётся всё время постоянной по величине и направлению, то можно применить формулу $A = FScos\alpha$, если же она при перемещении груза изменяется по величине, то её работу необходимо

рассчитывать по общей формуле $A_{1-2} = \int_1^2 F_s ds$.

Чтобы ответить на этот вопрос, сделаем рисунок к задаче, нарисует все силы, действующие на тело, и проанализируем ситуацию.

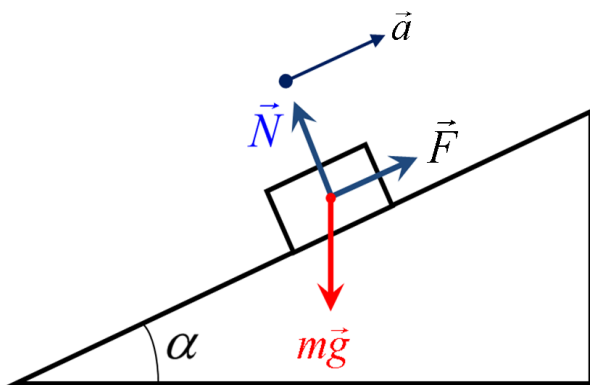


Рис.15. 1

Итак, на тело, движущееся вверх вдоль наклонной плоскости, действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$; сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила $\vec{F}$, работу которой необходимо найти. Сил трения и сопротивление воздуха нет. Силами гравитационного притяжения к другим телам в силу их очень малой величины по сравнению с другими

силами пренебрегаем. Так как размеры тела и среда, в которой движется груз, не указаны, то силу Архимеда так же не учитываем.

По условию задачи, тело поднимается по наклонной плоскости с постоянным по величине и направлению ускорением. Поэтому движение тела является равноускоренным и вектор ускорения тела направлен по движению тела вдоль наклонной плоскости. Угол наклона плоскости к горизонту не изменяется.

Таким образом, можно сделать вывод, что ситуация задачи на протяжении всего подъёма тела не изменяется, следовательно сила $\vec{F}$, работу которой необходимо найти, не изменяется ни по величине, ни по направлению. Тогда работу этой силы можно найти по формуле

$$A_F = FS \cos \alpha, \quad (15.1)$$

где S - это перемещение тела за рассматриваемое время;

α - угол между векторами перемещения $\vec{S}$ и вектором силы $\vec{F}$.

Решение

Для начала определим угол α между векторами силы $\vec{F}$ и вектором перемещения груза $\vec{S}$. Для этого сделаем рисунок согласно условию задачи (см. рис.15. 2)

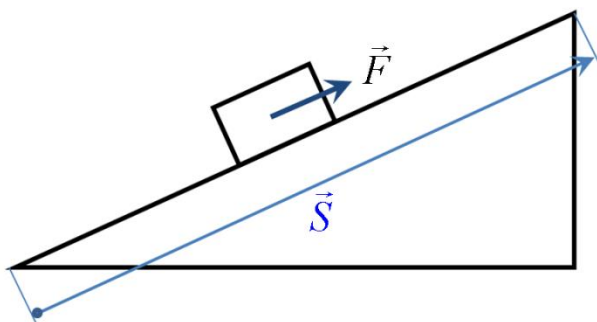


Рис.15.2

Из рис.15.2 следует, что $\alpha = 0^\circ$, следовательно $\cos \alpha = \cos 0^\circ = 1$, тогда уравнение (15.1) примет вид

$$A_F = FS. \quad (15.2)$$

Величину перемещения тела S найдём из геометрических соображений.

По рис.15.3 из прямоугольного треугольника находим, что

$$S = \frac{h}{\sin \beta}. \quad (15.3)$$

Подставим уравнение (15.3) в (15.2):

$$A_F = F \frac{h}{\sin \beta}. \quad (15.4)$$

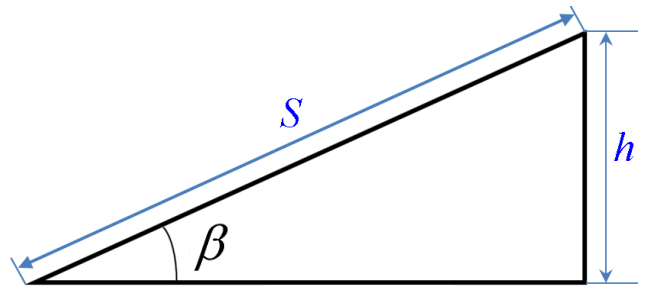


Рис.15.3

Величину $\sin \beta$ можно найти из уравнения динамики для тела. Так как оно по условию задачи движется с ускорением, следовательно, выполняется второй закон Ньютона, который с учётом рассмотренных ранее сил, будет иметь вид

$$\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}. \quad (15.5)$$

Для решения уравнения (15.5) выберем удобную прямоугольную систему координат. Для этого начало координат поместим в центре тяжести тела, а одну из осей направим по ускорению тела (см. рис.15.4).

Спроецируем уравнение (15.5) на оси координат:

$$OX: F - mg \sin \beta = ma \quad (15.6)$$

$$OY: N - mg \cos \beta = 0 \quad (15.7)$$

Величину $\sin \beta$ найдём из уравнения (15.6):

$$\sin \beta = \frac{F - ma}{mg}. \quad (15.8)$$

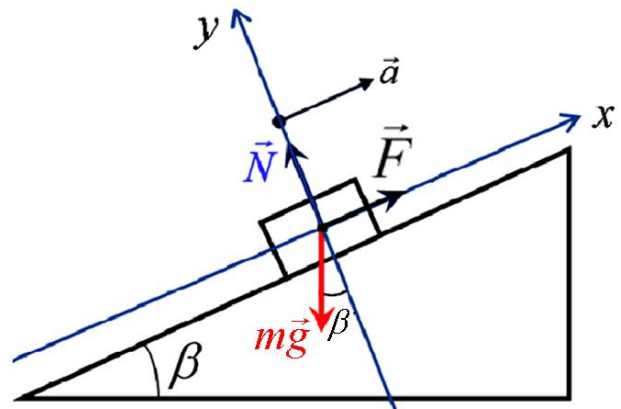


Рис.15. 4

Подставим уравнения (15.8) в (15.4):

$$A_F = F \frac{h}{\frac{F - ma}{mg}} = F \frac{mgh}{F - ma}. \quad (15.9)$$

Проверим размерность: $[A_F] = H \frac{H \cdot m}{H - H} = \cancel{H} \frac{H \cdot m}{\cancel{H}} = H \cdot m = \text{Дж}.$

Подставив численные значения величин в уравнение (15.9), найдем работу

силы F :

$$A_F = 20H \cdot \frac{2\text{кг} \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot 2,5\text{м}}{20H - 2\text{кг} \cdot 5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}} = 100 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A_F = 100 \text{ Дж}.$

5. МЕХАНИКА АБСОЛЮТНО ТВЁРДОГО ТЕЛА

Момент силы M



Опыт показывает, что при описании вращательного движения твёрдого тела, кроме величины и направления действующей на тело силы, важной характеристикой является ещё и точка приложения этой силы.

В связи с этим вводят в рассмотрение понятие момента силы $\vec{M}$. Различают *момент силы относительно точки* $\vec{M}$ (векторная величина) и *момент силы относительно оси* M_z (скалярная величина).

Моментом силы $\vec{M}$ (эм) относительно неподвижной точки O называется векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки O в точку приложения силы $\vec{F}$, на саму эту силу:

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}],$$

где $[M] = H \cdot m$, Ньютон - метр.

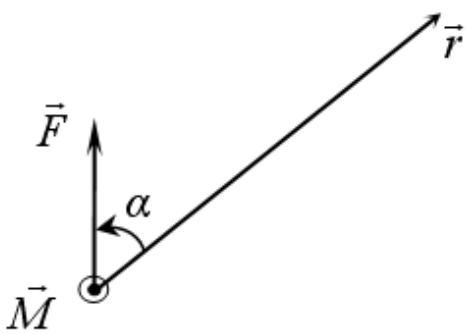


Рис.5.1

Направление вектора момента силы $\vec{M}$ определяется **по правилу векторного произведения (или правилу буравчика)**: если совместить начала перемножаемых векторов в точке O и вращать рукоятку буравчика от первого сомножителя в векторном произведении $\vec{r}$ ко второму $\vec{F}$ по кратчайшему повороту, то поступательное движение буравчика укажет направление вектора $\vec{M}$ (см.рис.5.1)

Можно использовать более простое **правило буравчика**:

если рукоятку буравчика вращать по направлению действия силы $\vec{F}$, то поступательное движение буравчика будет совпадать с направлением вектора момента силы $\vec{M}$ (см. рис.5.2).

На рис.5.1 и рис.5.2 вектор $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости чертежа на нас (обозначается кружочком с точкой внутри). При этом следует помнить, что начало вектора $\vec{M}$ совпадает с точкой O , сам вектор перпендикулярен одновременно векторам $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а его величину можно определить по формуле

$$M = rF \sin \alpha,$$

где α - угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

Величина $\vec{M}$ зависит от выбора точки O .

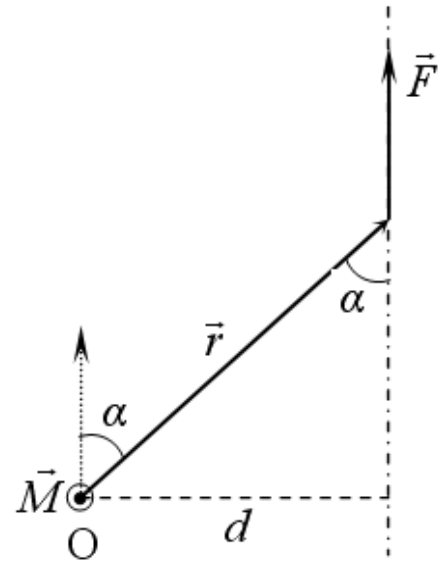


Рис.5.2

Моментом силы M_z относительно неподвижной оси Z называется скалярная величина, равная проекции на эту ось вектора момента силы $\vec{M}$ относительно любой точки O , выбранной на этой оси:

$$M_z = [\vec{r}\vec{F}]_z = Fd,$$

где M_z - момент силы относительно неподвижной оси, $[M_z] = H \cdot m$; d - плечо силы $\vec{F}$, m .

Плечом силы d (дэ) называется скалярная величина, равная кратчайшему расстоянию от оси вращения до линии действия силы $\vec{F}$ (см. рис.5.3).

$$[d] = m, \text{ метр.}$$

Величина M_z не зависит от выбора точки O на этой оси Z .

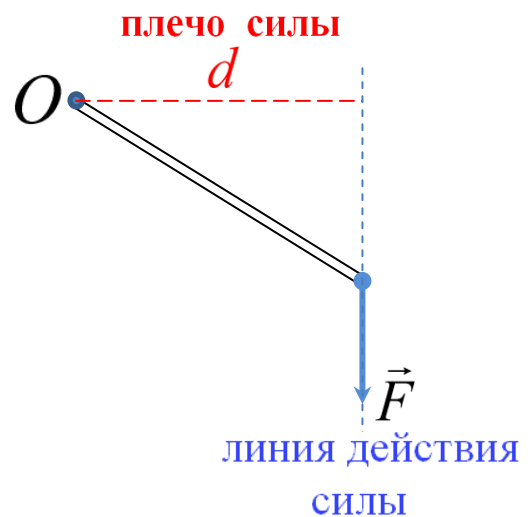


Рис.5.3

Условия равновесия твёрдого тела при плоской системе сил

Для того чтобы тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, находилось в состоянии равновесия или вращалось с постоянной угловой скоростью, необходимо выполнения одновременно двух условий.

Первое условие равновесия тела в инерциальной системе отсчёта: *векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю, то есть*

$$\sum \vec{F}_i = 0.$$

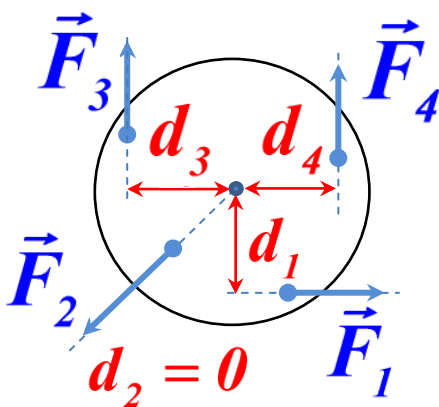
В этом случае равно нулю ускорение центра масс тела. Всегда можно найти такую систему отсчёта, в которой центр масс тела покоится.

Однако это условие не означает, что все точки тела должны покоиться. Они могут принимать участие во вращательном движении вокруг центра масс. Поэтому возникает ещё одно условие.

Второе условие равновесия тела в инерциальной системе отсчёта (правило моментов):

алгебраическая сумма моментов всех внешних сил относительно любой неподвижной оси вращения должна быть равна нулю:

$$\sum M_i = 0.$$



Следует учитывать правило знаков для моментов сил:

- если сила вращает тело вокруг выбранной оси Z по часовой стрелке, то момент такой силы имеет знак минус « - »;

- если сила вращает тело вокруг выбранной оси Z против часовой стрелке, то момент такой силы имеет знак плюс « + ».

Или другая формулировка **правила моментов**:

тело находится в равновесии относительно неподвижной оси, если сумма моментов сил, пытающихся повернуть тело по часовой стрелке, равна сумме моментов сил, пытающихся повернуть его против часовой стрелки:

$$\left(\sum M_i \right)_{по} = \left(\sum M_k \right)_{против}.$$

Момент инерции тела I

Наблюдения показывают, что при рассмотрении вращательного движения тела, основной характеристикой инертных свойств тела является не масса этого тела m , а величина, которая называется **моментом инерции тела I** (и).

Моментом инерции материальной точки относительно оси вращения Z называется скалярная величина I равная произведению массы материальной точки m на квадрат кратчайшего расстояния r^2 от оси вращения Z до рассматриваемой материальной точки:

$$I = mr^2.$$

$$[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2, \text{ килограмм-метр в квадрате}$$

Моментом инерции системы материальных точек относительно оси вращения Z называется скалярная величина I_z равная сумме произведений масс материальных точек системы m_i на квадраты кратчайших расстояний r_i^2 от оси вращения Z до рассматриваемых материальных точек системы:

$$I_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Реальное твёрдое тело можно рассматривать совокупность бесконечного числа материальных точек. Поэтому:

Моментом инерции твёрдого тела относительно неподвижной оси вращения Z называется скалярная величина I_z равная

$$I_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum m_i r_i^2 = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV,$$

где ρ - это функция зависимости распределения плотности тела в зависимости от координат, а сам интеграл вычисляется по всему объёму данного тела.

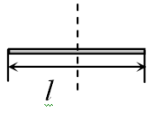
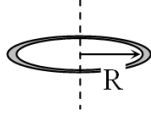
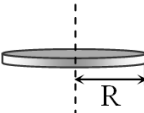
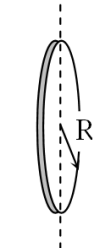
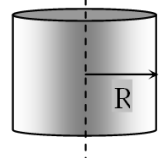
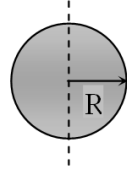
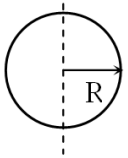
На практике момент инерции тела обычно определяют опытным путём, так как математически его определить бывает очень сложно.

Собственный момент инерции тела

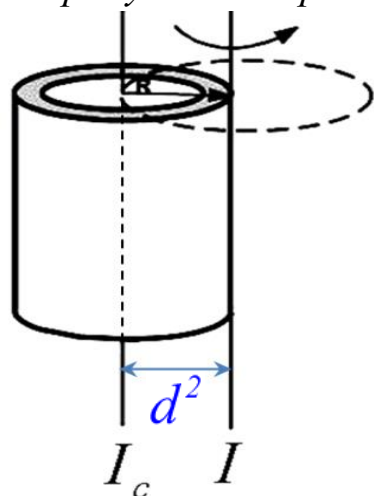
Собственным моментом инерции тела называется момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела.

Собственные моменты инерции некоторых однородных тел массой m

Таблица 1

однородный тонкий стержень длиной l	однородный тонкий обруч радиусом R	однородный тонкий диск радиусом R	однородный тонкий диск радиусом R	однородный сплошной цилиндр радиусом R	однородный шар радиусом R	однородная сфера радиусом R
						
$I = \frac{ml^2}{12}$	$I = mR^2$	$I = \frac{mR^2}{2}$	$I = \frac{mR^2}{4}$	$I = \frac{mR^2}{2}$	$I = \frac{2}{5}mR^2$	$I = \frac{2}{3}mR^2$

Если необходимо найти момент инерции тела относительно произвольной оси, не проходящей через центр масс тела, то применяют *теорему Штейнера*.



Теорема Штейнера

Момент инерции твёрдого тела I относительно произвольной оси, не проходящей через центр масс тела, равен сумме момента инерции этого тела I_c относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной данной оси, и произведению массы этого тела m на квадрат расстояния между этими осями d^2 :

$$I = I_c + md^2.$$

Работа силы A при вращательном движении тела

Элементарной работой dA силы при вращении твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется скалярная величина, равная произведению момента силы M_z относительно оси вращения Z , на элементарное угловое перемещение $d\varphi$:

$$dA = M_z d\varphi,$$

где dA - элементарная работа момента силы, Дж;

M_z - момент силы относительно оси вращения Z , Н · м;

$d\varphi$ - элементарный угол поворота тела, рад.

Работой произвольной силы A при вращении тела вокруг оси вращения Z называется скалярная величина, равная

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi,$$

где M_z - момент силы, действующий на тело относительно неподвижной оси вращения Z , $H \cdot m$;

φ_1 и φ_2 - начальный и конечный угол поворота тела, $рад$.

Работу постоянного по величине момента силы M_z при вращении тела вокруг неподвижной оси Z можно определить по формуле:

$$A = M_z \Delta\varphi,$$

где M_z - постоянный по величине момент силы, действующий на тело относительно неподвижной оси вращения Z , $H \cdot m$;

$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ - угол поворота тела вокруг оси Z , $рад$.

Моментом импульса L твёрдого тела, вращающегося относительно неподвижной оси Z называется скалярная величина, равная произведению момент инерции этого тела I относительно оси вращения, на его угловую скорость ω :

$$L = I\omega,$$

где L (эль)-момент импульса твёрдого тела относительно оси вращения, $Дж \cdot c$;

I - момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения, $кг \cdot м^2$;

ω - угловая скорость вращения тела, $\frac{рад}{c}$.

Кинетической энергией T твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси Z называется скалярная величина, равная половине произведения момента инерции этого тела I относительно оси вращения Z , на квадрат его угловой скорости ω^2 :

$$T = \frac{I\omega^2}{2},$$

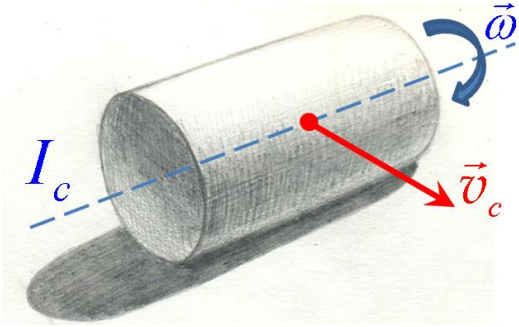
где T - кинетическая энергия вращающегося тела, $Дж$;

I - момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения, $кг \cdot м^2$;

ω - угловая скорость вращения тела, $\frac{рад}{c}$.

Теорема Кёнига

Кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося относительно собственной оси, движущейся поступательно, определяется по **теореме Кёнига**:



полная кинетическая энергия тела T равна сумме кинетической энергии поступательного движения тела со скоростью движения его центра масс $T_{\text{пост}}$ плюс кинетическая энергия вращательного движения тела $T_{\text{вращ}}$ относительно оси проходящей через его центр масс:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2},$$

где $T_{\text{пост}} = \frac{mv_c^2}{2}$ - кинетическая энергия, обусловленная поступательным движением тела, Дж;

$T_{\text{вращ}} = \frac{I_c \omega^2}{2}$ - кинетическая энергия, обусловленная вращательным движением тела, Дж;

T - полная кинетическая энергия движущегося тела, Дж;

v_c - скорость движения центра масс тела, $\frac{м}{с}$; m - масса твёрдого тела, кг;

I_c - момент инерции твёрдого тела относительно оси вращения, проходящей через центр масс тела, $кг \cdot м^2$;

ω - угловая скорость вращения тела, $\frac{рад}{с}$.

Основное уравнение динамики вращательного движения абсолютно твёрдого тела

В инерциальной системе отсчёта алгебраическая сумма моментов всех внешних сил $\sum M_{zi}^{\text{внеш}}$, действующих на тело относительно неподвижной оси вращения Z , равна произведению момента инерции этого тела относительно этой оси I_z , на сообщённое ему угловое ускорение ε :

$$\sum M_{zi}^{\text{внеш}} = I_z \varepsilon \quad \text{или} \quad M_{\text{рез}Z}^{\text{внеш}} = I_z \varepsilon,$$

где $M_{\text{рез}Z}^{\text{внеш}} = \sum M_{zi}^{\text{внеш}}$ - результирующий момент всех внешних сил, действующих на тело относительно неподвижной оси вращения Z .

Схема решения задач по динамике вращательного движения абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси

1. Сделайте чертёж к задаче, на котором нарисуйте тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, и все силы, действующие на него, с учётом точек приложения сил.

Обратите внимание на точки приложения сил к телу:

- сила тяжести $\vec{F}_{тяж}$ приложена к центру тяжести тела

(у симметричных однородных тел, центр тяжести совпадает с геометрическим центром тела);

- сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила упругости $\vec{F}_{упр}$ приложены к точке крепления тела к нити или пружине;

- сила реакции опоры $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{тр}$ приложены к точкам соприкосновения тела к опоре.

2. Если тело покоится, то ось вращения можно выбирать произвольно. Причём относительно любой оси вращения должно выполняться условие $\sum M_{z_i} = 0$. Поэтому, ось выбирают обычно так, чтобы через неё проходило как можно больше линий действия сил.

При необходимости можно записать несколько уравнений моментов относительно разных осей

Так как тело поступательно не движется, следовательно, относительно центра масс тела выполняется условие: $\sum \vec{F}_i = 0$.

Итак,

- если тело неподвижно или вращается вокруг оси Z равномерно, то запишите основное уравнение динамики вращательного движения тела относительно оси Z в виде

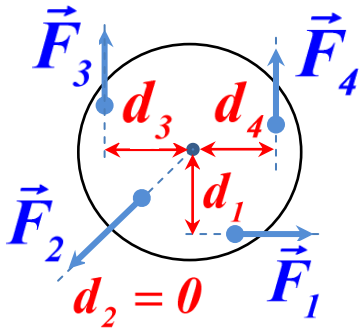
$$\sum M_{z_i} = 0 ;$$

- если тело вращается вокруг оси Z равноускоренно, то запишите основное уравнение динамики вращательного движения тела в виде

$$\sum M_{z_i} = I_z \varepsilon .$$

При этом правильно определяйте плечи сил d . Для этого опускайте перпендикуляр от оси вращения до линии действия силы.

Помните *правило знаков для моментов сил*:



моменты сил, которые пытаются повернуть тело по часовой стрелки, берутся в уравнении со знаком плюс, а моменты сил, которые пытаются повернуть тело против часовой стрелки, берутся в уравнении со знаком минус.

3. Решите полученную систему уравнений.

Примеры решения задач по динамике вращательного движения абсолютно твёрдого тела

Рассмотрим сначала задачу на применение формулы-определения.

Задача 16. Диск радиусом $R = 20$ см и массой 7000 г вращается вокруг своей оси симметрии согласно уравнению $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 3$ рад; $B = -1$ рад/с; $C = 0,1$ рад/с². Найдите закон, по которому меняется результирующий вращательный момент сил $M_{рез_z}$, действующий на диск. Определите результирующий момент сил M_1 , действующий на тело, через 2 с после начала вращения.

Ответ: $M_{рез_z} = M_1 = 28 \text{ мН} \cdot \text{м}$

Дано:

$$\varphi = A + Bt + Ct^2$$

$$A = 3 \text{ рад}$$

$$B = -1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$C = 0,1 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$

$$R = 0,2 \text{ м}$$

$$m = 7 \text{ кг}; t_1 = 2 \text{ с}$$

$$M_{рез_z} - ? \quad M_1 - ?$$

производной
времени.

Решение

Результирующий момент сил $M_{рез_z}$, действующий на тело, можно определить по основному уравнению динамики для абсолютно твёрдого тела:

$$M_{рез_z} = I_z \varepsilon. \quad (16.1)$$

Момент инерции I_z однородного диска относительно оси вращения Z (см. рис. 16.1) равен

$$I_z = \frac{mR^2}{2}. \quad (16.2)$$

Согласно определению, мгновенное угловое ускорение ε равно второй производной φ'' угла поворота тела по

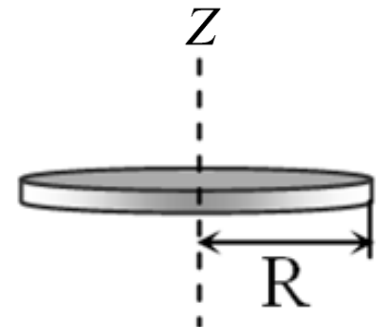


Рис.16.1

То есть

$$\omega = \varphi' = (A + Bt + Ct^2)' = B + 2Ct \quad \text{и} \quad \varepsilon = \varphi'' = (B + 2Ct)' = 2C.$$

Таким образом,

$$\varepsilon = 2C. \quad (16.3)$$

Из (16.3) следует, что угловое ускорение ε не зависит от времени, следовательно, диск вращается равноускоренно.

Подставив уравнения (16.2) и (16.3) в (16.1), получим уравнение зависимости результирующего момента сил, действующего на диск, от времени:

$$M_{рез_z} = \frac{mR^2}{2} \cdot 2C \quad (16.4)$$

Из уравнения (16.4) следует, что величина $M_{рез_z}$ не зависит от времени.

Проверим размерность уравнения (4).

$$[M_{рез_z}] = [H \cdot m] = \left[\frac{кг \cdot м}{с^2} \cdot м \right] = \left[\frac{кг \cdot м^2}{с^2} \right] = кг \cdot м^2 \cdot \frac{1}{с^2} = \frac{кг \cdot м^2}{с^2}.$$

Размерность уравнения (16.4) совпадает.

Таким образом, через $t = 2с$ имеем

$$M_{рез_z} = \frac{7кг \cdot (0,2м)^2}{2} \cdot 2 \cdot 0,1 \frac{рад}{с^2} = 28 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot м = 28 мН \cdot м.$$

$$M_{рез_z} = 28 мН \cdot м.$$

Ответ: $M_{рез_z} = M_1 = 28 мН \cdot м.$

Теперь рассмотрим задачу на применение схемы решения задач.

Задача 17. Лёгкая нерастяжимая нить с прикреплённым к ней грузом массой 2000 г намотана на сплошной цилиндрический вал радиусом 100 мм. При разматывании нити груз опускается с ускорением 50 см/с^2 . Определите массу и момент инерции вала. Силами трения в оси вала и сопротивлением воздуха пренебечь. Нить не проскальзывает по валу. **Ответ:** $M = 76 \text{ кг}$; $I = 0,38 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

Дано:

$$m = 2 \text{ кг}$$

$$a = 0,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$r = 0,1 \text{ м}$$

$$v_0 = 0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$M - ?$$

$$I - ?$$

Анализ задачи

Так как цилиндрический вал, по условию задачи, нельзя рассматривать как материальную точку, то для решения задачи воспользуемся схемой решения задач по динамике вращательного движения абсолютно твёрдого тела для цилиндрического вала и схемой решения задач по динамике поступательного движения для грузика.

Схема решения задач по динамике вращательного движения абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси

1. Сделайте чертёж к задаче, на котором нарисуйте тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, и все силы, действующие на него, с учётом точек приложения сил.

Обратите внимание на точки приложения сил к телу:

- сила тяжести $\vec{F}_{тяж}$ приложена к центру тяжести тела

(у симметричных однородных тел, центр тяжести совпадает с геометрическим центром тела);

- сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила упругости $\vec{F}_{упр}$ приложены к точке крепления тела к нити или пружине;

- сила реакции опоры $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{тр}$ приложены к точкам соприкосновения тела к опоре.

2. Если тело покоится, то ось вращения можно выбирать произвольно. Причём относительно любой оси вращения должно выполняться условие

$\sum M_{z_i} = 0$. Поэтому, ось выбирают обычно так, чтобы через неё проходило как можно больше линий действия сил.

При необходимости можно записать несколько уравнений моментов относительно разных осей.

Так как тело поступательно не движется, следовательно, относительно центра масс тела выполняется условие $\sum \vec{F}_i = 0$.

Итак,

- если тело неподвижно или вращается вокруг оси Z равномерно, то запишите основное уравнение динамики вращательного движения тела относительно оси Z в виде

$$\sum M_{zi} = 0 ;$$

- если тело вращается вокруг оси Z равноускоренно, то запишите основное уравнение динамики вращательного движения тела в виде

$$\sum M_{zi} = I_z \varepsilon .$$

При этом правильно определяйте плечи сил d . Для этого опускайте перпендикуляр от оси вращения до линии действия силы.

3. Решите полученную систему уравнений.

Схема решения задач по динамике материальной точки или поступательного движения абсолютно твёрдого тела

1. Сделайте чертеж к задаче, на котором нарисуйте тела, рассматриваемые в задаче, все силы, действующие на каждое тело, и укажите направления ускорений этих тел.

2. Если тело движется без ускорения (то есть покоится или движется равномерно и прямолинейно), то запишите для него первый закон Ньютона в виде

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0 .$$

Если тело движется с ускорением, то запишите для него второй закон Ньютона в виде

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = m\vec{a} .$$

3. Для каждого тела распишите закон Ньютона в проекциях на оси координат, для чего сначала:

- для каждого тела выберите удобную систему координат. Начало координат обычно помещают в рассматриваемой материальной точке или в центре тяжести тела, а одну из координатных осей направляют по вектору ускорения этого тела;

- для каждого тела распишите своё векторное уравнение в проекциях на оси координат с учётом знаков проекций сил.

4. Решите полученную систему уравнений.

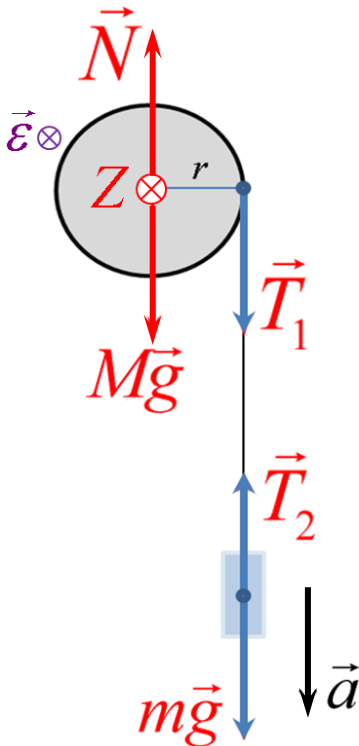
Решение

Рис.17.1

Итак, приступаем к решению задачи. Для этого сначала сделаем рисунок, на котором изобразим все тела, рассматриваемые в задаче и все силы, действующие на каждое тело (см. рис.17.1).

По условию задачи, цилиндрический вал и грузик не имеют электрического заряда, не намагничены и по ним не протекает электрический ток. Поэтому электрическое, магнитное и электромагнитное поля на них действовать не будут. Однако вал и грузик обладают массой, поэтому на них будет действовать сила тяжести со стороны гравитационного поля Земли.

Кроме силы тяжести, на вал будут действовать сила натяжения нити $\vec{T}_1$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ со стороны оси вала, а на грузик сила

тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$.

Так как среда, в которой находятся вал и грузик, не указана, то предполагается, что всё происходит в вакууме и, следовательно, силы Архимеда и силы сопротивления воздуха будут равны нулю.

Силами гравитационного притяжения $\vec{F}_{gp}$ к окружающим вал и грузик телам из-за их малой величины также пренебрегаем.

Таким образом, на вал действуют только три основные силы: сила тяжести $M\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}_1$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ со стороны оси вала.

А на грузик действуют только две основные силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$.

Теперь запишем уравнения динамики для каждого тела. Так как вал вращается вокруг неподвижной оси, то для него необходимо записать основное уравнение динамики вращательного движения, а для грузика, который движется поступательно, запишем основное уравнение динамики поступательного движения.

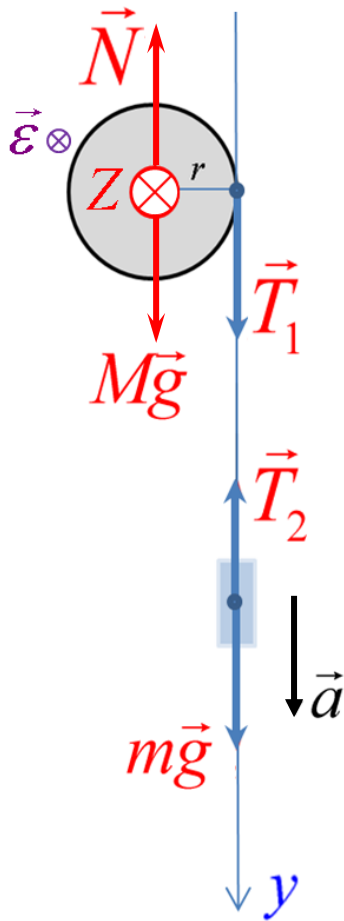


Рис.17.2

Уравнение динамики вращательного движения для блока вокруг неподвижной оси вращения Z имеет вид

$$M_{Mg} + M_N + M_{T_1} = I\varepsilon. \quad (17.1)$$

Уравнение динамики поступательного движения для груза имеет вид

$$\vec{T}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}. \quad (17.2)$$

Теперь, согласно пункту 2 схемы решения задач, для каждого тела выберем свою систему координат, чтобы на них спроецировать уравнения (17.1) и (17.2).

Начало координат для груза поместим в его центре тяжести и направим ось OY по направлению ускорения тела $\vec{a}$ (то есть вертикально вниз).

Направление оси вращения Z выберем с учётом направления вращения вала с помощью правила буравчика:

если буравчик установить вдоль оси вращения Z и крутить рукоятку буравчика по направлению вращения вала, то поступательное движение буравчика покажет положительное направление оси вращения Z .

Согласно этому правилу, ось вращения вала Z направлена перпендикулярно рисунку от нас (см. рис.17.2).

Спроецируем уравнение (17.1) на ось Z с учётом знаков проекций моментов сил и уравнение (17.2) на ось Oy с учётом знаков проекций сил:

$$Mgd_1 + Nd_2 + T_1d_3 = I\varepsilon. \quad (17.3)$$

$$mg - T_2 = ma. \quad (17.4)$$

Из рис.17.2 следует, что плечо силы тяжести $d_1 = 0$ и силы реакции со стороны оси $d_2 = 0$, так как линия действия этих сил проходит через ось вращения Z . Плечо силы натяжения нити равно радиусу вала, то есть $d_3 = r$.

По условию задачи вал представляет собой однородный цилиндр, поэтому момент инерции вала I относительно оси вращения Z

будет равен
$$I = \frac{Mr^2}{2}, \text{ (см. таблицу 1 на стр.120).}$$

Угловое ускорение вала ε распишем через тангенциальное ускорение

a_τ точек на ободе вала
$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{r}.$$

Тогда уравнение (17.3) примет вид

$$0 + 0 + T_1 r = \frac{Mr^2}{2} \frac{a_\tau}{r},$$

и, окончательно,
$$T_1 = \frac{Ma_\tau}{2}.$$

Таким образом, получили систему двух уравнений:

$$\begin{cases} T_1 = \frac{Ma_\tau}{2} \\ mg - T_2 = ma \end{cases} \quad (17.5)$$

$$(17.6)$$

В этой системе два уравнения с четырьмя неизвестными величинами T_1 , T_2 , a и a_τ , следовательно, решить её в данный момент нельзя. Поэтому необходимо найти ещё два независимых уравнения. Для этого проанализируем более подробно условие задачи.

Так как нить невесома, то из анализа второго закона Ньютона можно получить, что $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$. Докажем это.

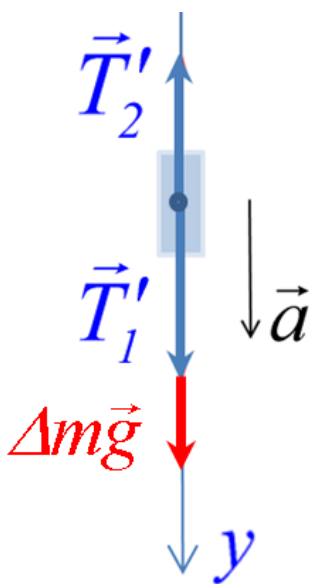


Рис.17.3

Запишем уравнение динамики для кусочка нити массой Δm . Так как нить по условию задачи нерастяжима, то любая её часть будет двигаться с таким же ускорением $\vec{a}$, как и грузик.

На кусочки нити массой Δm с двух сторон действуют силы натяжения $\vec{T}'_1$ и $\vec{T}'_2$, а также сила тяжести $\Delta m\vec{g}$ (см.рис.17.3).

Тогда по второму закону Ньютона имеем

$$\vec{T}'_1 + \vec{T}'_2 + \Delta m\vec{g} = \Delta m\vec{a},$$

и в проекции на ось Oy получим

$$T'_1 - T'_2 + \Delta mg = \Delta ma.$$

Так как нить по условию задачи невесома, следовательно, $\Delta m = 0$ и тогда получим, что $T_1' - T_2' = 0$ и, следовательно, в любой точке свисающей части нити имеем $|\vec{T}_1'| = |\vec{T}_2'| = T$.

Теперь необходимо связать тангенциальное ускорение a_τ с ускорением груза a .

По условию задачи нить нерастяжима и не проскальзывает по валу при движении груза. Отсюда следует, что ускорение точек на ободе вала будет таким же, как и ускорение груза, то есть $a_\tau = a$.

С учётом всего вышесказанного, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} T = \frac{Ma}{2} \end{cases} \quad (17.7)$$

$$\begin{cases} mg - T = ma \end{cases} \quad (17.8)$$

В этой системе два уравнения с двумя неизвестными. Теперь её можно решить.

Подставим (17.7) в (17.8):

$$mg - \frac{Ma}{2} = ma, \Rightarrow, \frac{Ma}{2} = mg - ma, \Rightarrow, \\ M = \frac{2m(g - a)}{a}. \quad (17.9)$$

Проверим размерность уравнения (17.9).

$$[M] = \frac{\kappa\mathcal{Z} \cdot \left(\frac{M}{c^2} - \frac{M}{c^2} \right)}{\frac{M}{c^2}} = \frac{\kappa\mathcal{Z} \cdot \frac{M}{c^2}}{\frac{M}{c^2}} = \kappa\mathcal{Z}.$$

Решив уравнение (17.8), получим $M = \frac{2 \cdot 2\kappa\mathcal{Z} \left(10 \frac{M}{c^2} - 0.5 \frac{M}{c^2} \right)}{0.5 \frac{M}{c^2}} = 76\kappa\mathcal{Z}.$

Так как момент инерции вала $I = \frac{Mr^2}{2}$, то окончательно получим

$$I = \frac{76\kappa\mathcal{Z} \cdot (0.1M)^2}{2} = 0.38\kappa\mathcal{Z} \cdot M^2.$$

Ответ: $M = 76\kappa\mathcal{Z}; I = 0.38\kappa\mathcal{Z} \cdot M^2$.

Задача 18. Груз массой $m_1 = 400 \text{ г}$, находящийся на гладкой наклонной плоскости, расположенной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, соединён невесомой нерастяжимой нитью с другим грузом массой $m_2 = 1000 \text{ г}$. Нить перекинута через блок в виде однородного диска массой $M = 500 \text{ г}$, расположенного на вершине наклонной плоскости. Определите ускорения, с которыми движутся грузы и блок, а так же силы натяжения нитей. Трения в оси блока нет. Нить по блоку не проскальзывает. **Ответ:** $a_1 = a_2 = 4,85 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $T_1 = 3,94 \text{ Н}$ и $T_2 = 5,15 \text{ Н}$.

Анализ задачи

Дано:
 $m_1 = 0,4 \text{ кг}$

$m_2 = 1 \text{ кг}$

$M = 500 \text{ г}$

$\alpha = 30^\circ$

$a_1 - ?, a_2 - ?$

$T_1 - ?, T_2 - ?$

Так как по условию задачи заданы массы тел, есть информация о силах трения, то для решения этой задачи можно применить законы динамики.

В нашей задаче известны массы двух грузов, которые движутся поступательно, и масса блока, который находится во вращательном движении. Поэтому применим к этим телам соответствующие схемы решения задач.

Схема решения задач по динамике материальной точки или поступательного движения абсолютно твёрдого тела

1. Сделайте чертеж к задаче, на котором нарисуйте тела, рассматриваемые в задаче, все силы, действующие на каждое тело, и укажите направления ускорений этих тел.

2. Если тело движется без ускорения (то есть покоится или движется равномерно и прямолинейно), то запишите для него первый закон Ньютона в виде $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$.

Если тело движется с ускорением, то запишите для него второй закон Ньютона в виде $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = m\vec{a}$.

3. Для каждого тела распишите закон Ньютона в проекциях на оси координат, для чего сначала

- для каждого тела выберите удобную систему координат. Начало координат обычно помещают в центре тяжести тела, а одну из координатных осей направляют по вектору ускорения этого тела;

- для каждого тела распишите своё векторное уравнение в проекциях на оси координат с учётом знаков проекций сил.

4. Решите полученную систему уравнений.

Схема решения задач по динамике вращательного движения абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси

1. Сделайте чертёж к задаче, на котором нарисуйте тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, и все силы, действующие на него, с учётом точек приложения сил.

2. Если тело покоится, то ось вращения можно выбирать произвольно. Причём относительно любой оси вращения должно выполняться условие $\sum M_{z_i} = 0$. Поэтому, ось выбирают обычно так, чтобы через неё проходило как можно больше линий действия сил.

При необходимости можно записать несколько уравнений моментов относительно разных осей

Так как тело поступательно не движется, следовательно, относительно центра масс тела выполняется условие $\sum \vec{F}_i = 0$.

Итак,

- если тело неподвижно или вращается вокруг оси Z равномерно, то запишите основное уравнение динамики вращательного движения тела относительно оси Z в виде $\sum M_{zi} = 0$;

- если тело вращается вокруг оси Z равноускоренно, то запишите основное уравнение динамики вращательного движения тела в виде

$$\sum M_{zi} = I_z \varepsilon.$$

При этом правильно определяйте плечи сил d . Для этого опускайте перпендикуляр от оси вращения до линии действия силы.

3. Решите полученную систему уравнений.

Решение

Итак, согласно схемам решения задач, делаем рисунок, на котором изображаем тела, о которых есть информация в задаче, расставляем все силы, действующие на каждое тело, вектора их ускорений и направления координатных осей.

Как определить количество сил, действующих на тело, и выбрать направление координатных осей, мы рассмотрели ранее в задаче 10.

Для диска ось вращения Z мы направили, согласно правилу буравчика, перпендикулярно плоскости рисунка от нас (см. правило буравчика на стр.129).

Блок движется с угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$, которое в нашем случае сонаправлено с осью вращения блока Z .

Так как нить нерастяжима и по поверхности блока не проскальзывает, то тангенциальное ускорение точек $\vec{a}_\tau$ на поверхности блока будет равно линейному ускорению грузов $\vec{a}$.

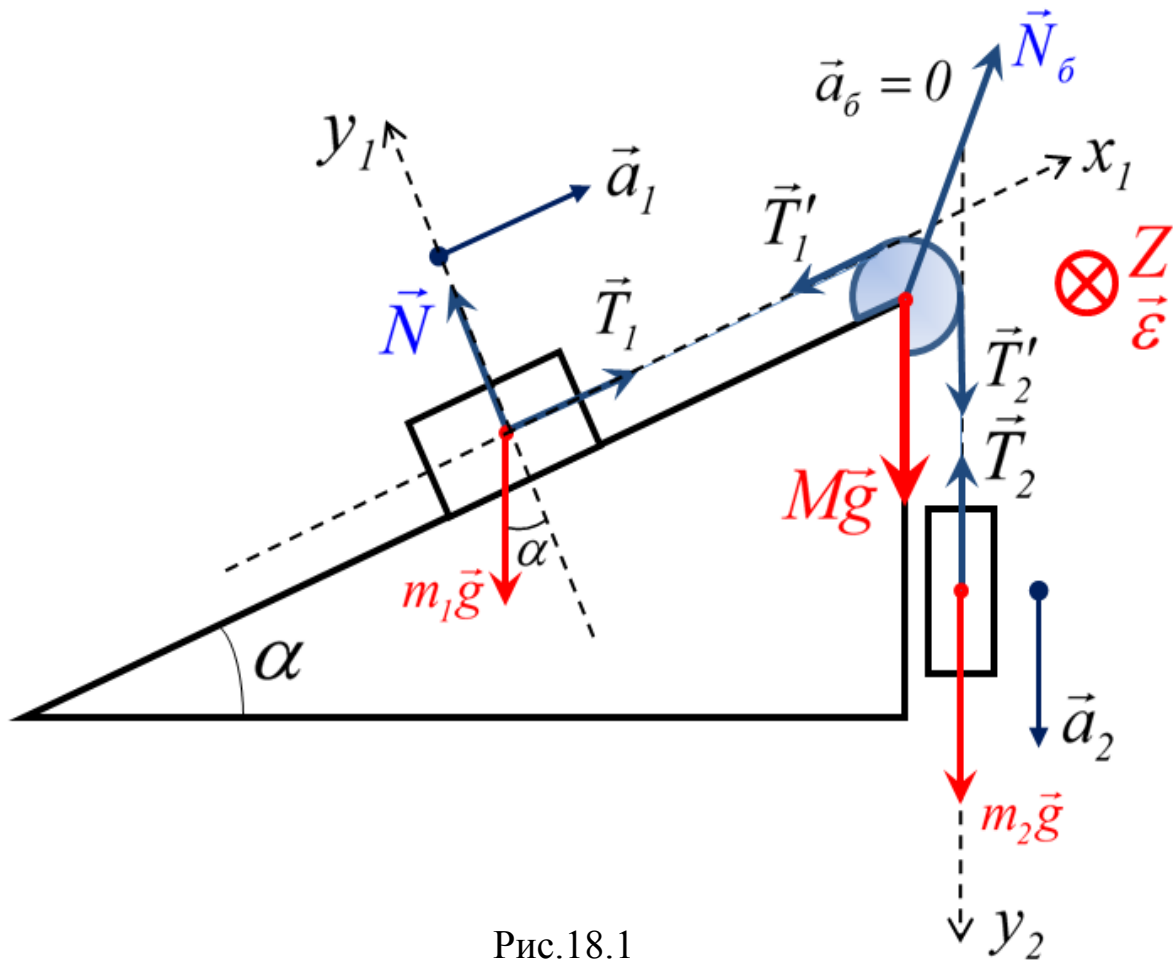


Рис.18.1

Далее, согласно пунктам 2 схемы решения задач, запишем уравнения динамики поступательного движения для первого и второго грузика и уравнение динамики вращательного движения для блока.

Так как грузики и блок движутся с ускорениями, то для них выполняется второй закон Ньютона в виде

$$\begin{cases} m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1 \\ m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2 \\ M_{T'_1} + M_{T'_2} + M_{N_6} + M_{mg} = I \varepsilon \end{cases} \quad (18.1)$$

По условию задачи нить нерастяжима. Значит в любой момент времени после начала движения, у грузиков будут одинаковыми по величине пути S , скорости v и ускорения a .

Отсюда следует, что ускорения грузов будут одинаковыми, то есть

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a.$$

Так же по условию задачи сказано, что нить невесома. Это приводит к тому, что сила натяжения слева от блока вдоль всей нити будет одинаковой и равной $|T_2'| = |T_1'| = T$ и справа от блока тоже будет одинаковой и равной $|T_2''| = |T_1''| = T_2$, (смотри задачу 10).

Однако силы натяжения T_1 и T_2 должны быть разными, иначе наш блок вращался бы без ускорения.

Используя всё вышесказанное, систему уравнений (18.1) можно переписать так:

$$\begin{cases} m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a} \\ m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a} \\ M_{T_1} + M_{T_2} + M_{N_6} + M_{mg} = I \varepsilon \end{cases} \quad (18.2)$$

Теперь распишем уравнения системы (18.2) на соответствующие оси координат:

$$\begin{cases} \text{на } OX_1 : T_1 - m_1 g \sin \alpha = m_1 a \end{cases} \quad (18.3)$$

$$\begin{cases} \text{на } OY_1 : N - m_1 g \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (18.4)$$

$$\begin{cases} \text{на } OY_2 : m_2 g - T_2 = m_2 a \end{cases} \quad (18.5)$$

$$\begin{cases} \text{на } OZ : T_2 r - T_1 r + 0 + 0 = I \varepsilon \end{cases} \quad (18.6)$$

В уравнении (18.6) мы учли, что плечи силы реакции оси на блок $\vec{N}_6$ и силы тяжести блока $M\vec{g}$ равны нулю, так как линии действия этих сил проходят через ось блока. Поэтому и моменты этих сил относительно оси вращения блока тоже равны нулю.

Так как по условию задачи блок представляет собой однородный сплошной диск, вращающийся относительно своей главной оси, то (см. таблицу 1 на стр. 120) момент инерции блока можно определить по формуле

$$I = \frac{Mr^2}{2},$$

где M - масса диска; r - радиус диска.

Угловое ускорение диска можно найти по формуле $\varepsilon = \frac{a_\tau}{r}$,

где a_τ - тангенциальное ускорение точек на ободе диска;

r - радиус диска.

По условию задачи, нить является нерастяжимой и не проскальзывает по поверхности блока. Отсюда следует, что тангенциальное ускорение точек на ободе диска равно по величине линейному ускорению грузов, то есть $a_\tau = a$ и, следовательно,

$$\varepsilon = \frac{a}{r},$$

где a - линейное ускорение грузиков.

Тогда нашу систему уравнений можно переписать так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{на } OX_1 : T_1 - m_1 g \sin \alpha = m_1 a \end{array} \right. \quad (18.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{на } OY_1 : N - m_1 g \cos \alpha = 0 \end{array} \right. \quad (18.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{на } OY_2 : m_2 g - T_2 = m_2 a \end{array} \right. \quad (18.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{на } OZ : (T_2 - T_1)r = \frac{Mr^2}{2} \cdot \frac{a}{r} \end{array} \right. \quad (18.10)$$

Из уравнения (18.7):

$$T_1 = m_1 a + m_1 g \sin \alpha. \quad (18.11)$$

Из уравнения (18.9):

$$T_2 = m_2 g - m_2 a. \quad (18.12)$$

Тогда, $T_2 - T_1 = m_2 g - m_2 a - m_1 a - m_1 g \sin \alpha, \Rightarrow,$

$$T_2 - T_1 = g(m_2 - m_1 \sin \alpha) - a(m_2 + m_1). \quad (18.13)$$

Подставим уравнение (18.13) в (18.10):

$$(g(m_2 - m_1 \sin \alpha) - a(m_2 + m_1))r = \frac{Mr^2}{2} \cdot \frac{a}{r}, \Rightarrow,$$

$$g(m_2 - m_1 \sin \alpha) - a(m_2 + m_1) = \frac{Ma}{2}, \Rightarrow,$$

$$a\left(m_2 + m_1 + \frac{M}{2}\right) = g(m_2 - m_1 \sin \alpha), \Rightarrow,$$

$$a = g \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_2 + m_1 + \frac{M}{2}}. \quad (18.14)$$

Проверим размерность уравнения (18.14).

$$\left[\frac{M}{c^2} \right] = \frac{M}{c^2} \cdot \frac{K\mathcal{Z} - K\mathcal{Z}}{K\mathcal{Z} + K\mathcal{Z} + K\mathcal{Z}} = \frac{M}{c^2} \cdot \frac{K\mathcal{Z}}{K\mathcal{Z}} = \frac{M}{c^2}.$$

Подставив данные из условия задачи, получим

$$a = 10 \frac{M}{c^2} \cdot \frac{1K\mathcal{Z} - 0,4K\mathcal{Z} \cdot 0,5}{1K\mathcal{Z} + 0,4K\mathcal{Z} + \frac{0,5K\mathcal{Z}}{2}} = 10 \frac{M}{c^2} \cdot \frac{0,8K\mathcal{Z}}{1,65K\mathcal{Z}} = 4,85 \frac{M}{c^2}.$$

Силу натяжения нитей найдём из уравнений (18.7) и (18.9).

$$T_1 = m_1(a + g \sin \alpha) = 0,4K\mathcal{Z} \left(4,85 \frac{M}{c^2} + 10 \frac{M}{c^2} \cdot 0,5 \right) = 3,94 H.$$

$$T_2 = m_2(g - a) = 1K\mathcal{Z} \left(10 \frac{M}{c^2} - 4,85 \frac{M}{c^2} \right) = 5,15 H.$$

Ответ: $a_1 = a_2 = 4,85 \frac{M}{c^2}$; $T_1 = 3,94 H$ и $T_2 = 5,15 H$.

6. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Механической системой называется мысленно выделенная совокупность тел, рассматриваемых в условии данной задачи.

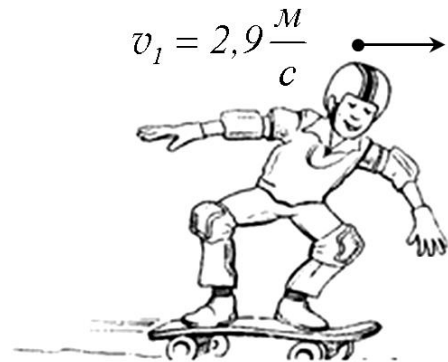
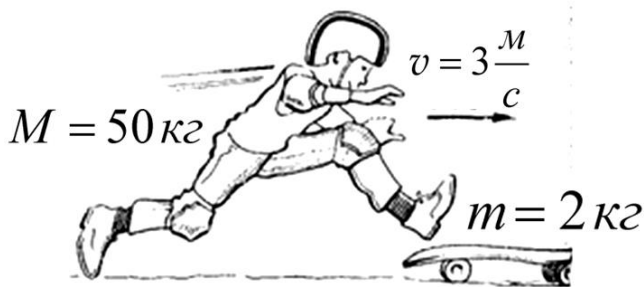
Закон изменения импульса

В инерциальной системе отсчёта произведение векторной суммы всех внешних сил, действующих на тела механической системы $\sum \vec{F}_i^{\text{внешних}}$, на время действия этих сил t , равно изменению импульса этой механической системы:

$$\left(\sum \vec{F}_i^{\text{внешних}} \right) t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1,$$

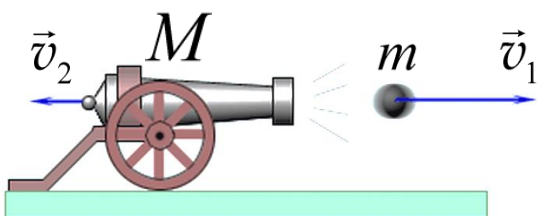
где $\vec{p}_1 = \sum \vec{p}_{i1}$ - начальный импульс механической системы;

$\vec{p}_2 = \sum \vec{p}_{i2}$ - конечный импульс механической системы.



Закон сохранения импульса

В инерциальной системе отсчёта векторная сумма импульсов тел замкнутой механической системы остаётся постоянной как по величине, так и по направлению, при любых движениях и взаимодействиях тел системы:



$$\sum \vec{p}_{i1} = \sum \vec{p}_{i2},$$

где $\vec{p}_{i1}$ - начальный импульс i -го тела;
 $\vec{p}_{i2}$ - конечный импульс i -го тела.

Замкнутой называется система тел, на которую не действуют внешние силы или векторная сумма всех внешних сил равна нулю.

Внешними называются силы, действующие на систему со стороны тел, не входящих в рассматриваемую систему.

Внутренними называются силы, действующие между телами самой системы.

Для незамкнутых механических систем закон сохранения импульса можно применить в следующих случаях:

1. если проекции всех внешних сил, действующих на систему, на какое-либо направление в пространстве равны нулю, то по этому направлению выполняется закон сохранения проекции импульса.

То есть, если $\sum F_{xi}^{\text{внешних}} = 0, \Rightarrow, \left(\sum p_{xi}\right)_{\text{до}} = \left(\sum p_{xi}\right)_{\text{после}},$

где $\left(\sum p_{xi}\right)_{\text{до}}$ - сумма проекций импульсов тел системы на ось OX до взаимодействия;

$\left(\sum p_{xi}\right)_{\text{после}}$ - сумма проекций импульсов тел системы на ось OX после взаимодействия;

2. если внутренние силы по величине много больше внешних сил (например, разрыв снаряда), либо очень мал промежуток времени Δt , в течение которого действуют внешние силы (например, удар), то закон сохранения импульса можно применить либо в векторном виде

$$\left(\sum \vec{p}_i\right)_{\text{до}} = \left(\sum \vec{p}_i\right)_{\text{после}},$$

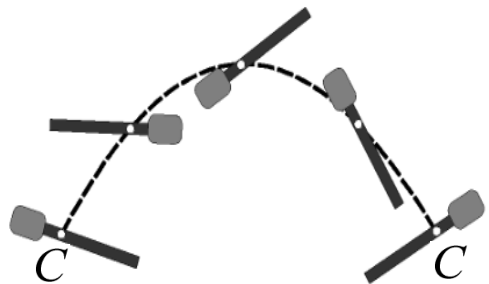
либо в скалярном виде на любое направление в пространстве

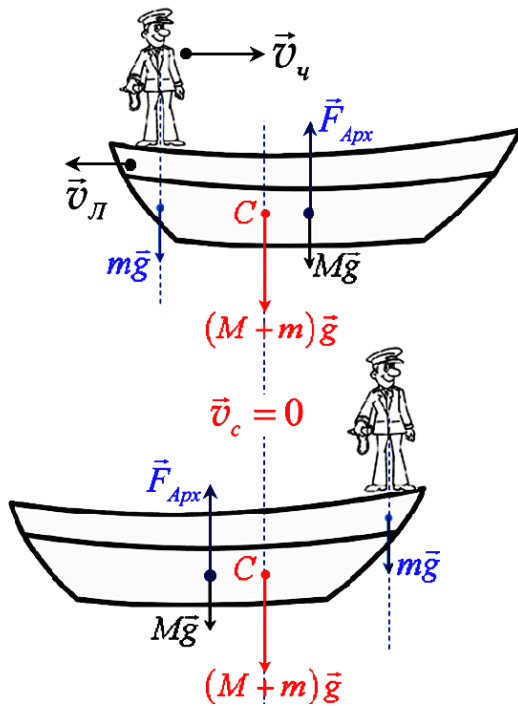
$$\left(\sum p_{xi}\right)_{\text{до}} = \left(\sum p_{xi}\right)_{\text{после}}.$$

Закон движения центра масс

В инерциальной системе отчёта центр масс механической системы движется как материальная точка, имеющая массу всей системы, на которую действует сила, равная векторной сумме всех внешних сил, действующих на тела этой механической системы:

$$\sum \vec{F}_i^{\text{внеш}} = m\vec{a}_c.$$





Закон движения центра масс замкнутой механической системы

В инерциальной системе отчёта центр масс замкнутой механической системы находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно при любых движениях и взаимодействиях тел системы:

$$\vec{a}_c = 0 \quad \text{или} \quad \vec{v}_c = \text{const},$$

где $\vec{a}_c$ и $\vec{v}_c$ - ускорение и скорость центра масс механической системы.

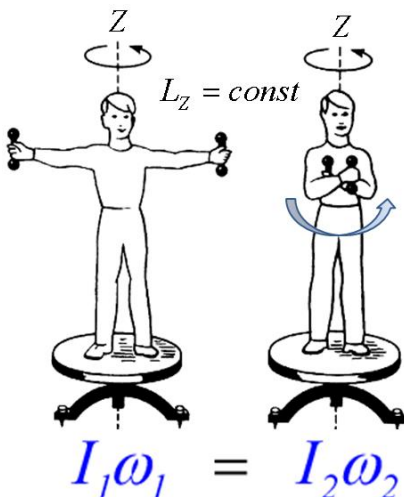
Закон изменения момента импульса механической системы относительно неподвижной оси вращения

В инерциальной системе отсчёта произведение алгебраической суммы моментов всех внешних сил $\sum M_{iz}^{\text{внеш}}$, действующих на тела механической системы относительно неподвижной оси вращения Z , на время действия этих сил t , равно изменению момента импульса этой системы $L_{2z} - L_{1z}$ относительно этой же оси вращения Z :

$$\left(\sum M_{iz}^{\text{внеш}} \right) t = L_{2z} - L_{1z},$$

где $L_{1z} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{до}}$ и $L_{2z} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{после}}$ - момент импульса системы до и после взаимодействия относительно оси вращения Z .

Закон сохранения момента импульса механической системы относительно неподвижной оси вращения



В инерциальной системе отсчёта момент импульса замкнутой механической системы относительно неподвижной оси вращения Z не изменяется при любых движениях и взаимодействиях тел системы:

$$\left(\sum L_{iz} \right)_{\text{до}} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{после}}.$$

Для незамкнутых механических систем закон сохранения момента импульса можно применить в следующих случаях:

1. если проекции моментов всех внешних сил, действующих на систему, на какую-либо ось Z в пространстве равны нулю, то на направление этой оси будет выполняться закон сохранения проекции момента импульса.

$$\text{То есть, если } \sum M_{iz}^{\text{внешних}} = 0, \Rightarrow, \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{до}} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{после}},$$

где $\left(\sum L_{iz} \right)_{\text{до}}$ - сумма проекций моментов импульсов тел системы на ось Z до взаимодействия;

$\left(\sum L_{iz} \right)_{\text{после}}$ - сумма проекций моментов импульсов тел системы на ось Z после взаимодействия;

2. если момент внутренних сил по величине много больше момента внешних сил (например, разрыв снаряда), либо очень мал промежуток времени Δt , в течение которого действуют моменты внешних сил (например, удар), то закон сохранения момента импульса можно применить

$$\text{либо в векторном виде } \left(\sum \vec{L}_i \right)_{\text{до}} = \left(\sum \vec{L}_i \right)_{\text{после}};$$

либо в скалярном виде на направление оси вращения Z :

$$\left(\sum L_{iz} \right)_{\text{до}} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{после}}.$$

Закон сохранения энергии

Энергия ниоткуда не возникает и никуда не исчезает, а лишь переходит из одного вида энергии в другой, причём так, что полная энергия изолированной системы остаётся постоянной.

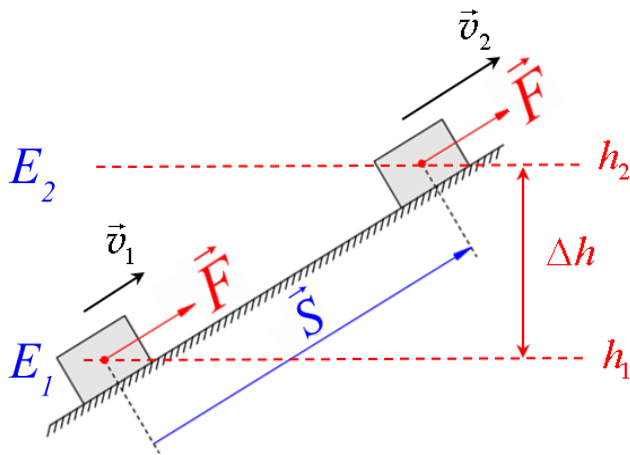
$$W = T + \Pi + U + W_{\text{грав}} + W_{\text{магн}} + W_{\text{электр}} + W_{\text{ядерн}} + \dots = \text{const}.$$

Например, механическая энергия при столкновении тел частично переходит в тепловую энергию, энергию звуковых волн, затрачивается на работу по деформации тел. Однако суммарная энергия до и после столкновения не изменяется.

Следует отметить, что полная энергия системы включает в себя все виды энергии. Этот закон является фундаментальным законом природы и выполняется всегда. Обычно студенты этот закон путают с законом сохранения полной механической энергии. Обратите на это внимание.

Если Вы его применяете, то должны проанализировать все остальные виды энергии и доказать, что они не изменяются при переходе системы из одного состояния в другие.

Закон изменения полной механической энергии



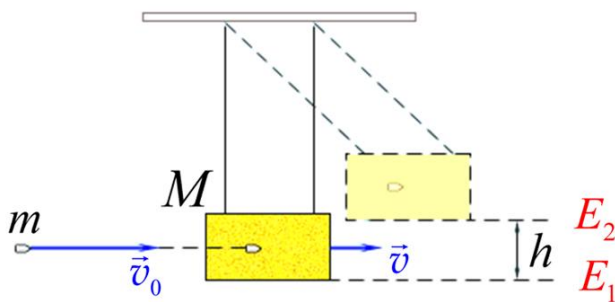
Алгебраическая сумма работ всех неконсервативных сил, действующих на тела механической системы, равна изменению полной механической энергии тел этой системы:

$$\sum A_{\text{неконсервативных}} = E_2 - E_1,$$

где E_1 - полная механическая энергия системы в начальном состоянии;

E_2 - полная механическая энергия системы в конечном состоянии.

Закон сохранения полной механической энергии



Полная механическая энергия системы, на тела которой действуют только консервативные силы или все действующие на систему неконсервативные силы работу не совершают, не изменяется с течением времени:

$$E_1 = E_2,$$

где E_1 - полная механическая энергия системы в начальном состоянии;

E_2 - полная механическая энергия системы в конечном состоянии.

К консервативным силам относятся: $F_{\text{грав}}$, $F_{\text{тяж}}$, $F_{\text{упр}}$, $F_{\text{кулона}}$, $F_{\text{арх}}$.

К неконсервативным - все остальные силы.

Если в задаче требуется найти работу консервативной силы, то удобно применить теорему о потенциальной энергии.

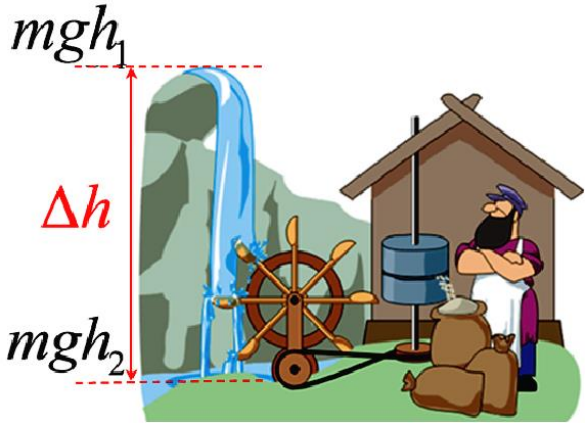
Теорема о потенциальной энергии

Работа консервативной силы $A_{\text{конс}}$ равна изменению потенциальной энергии тела или системы тел, взятому с противоположным знаком:

$$A_{\text{конс}} = -(P_2 - P_1),$$

где P_1 - потенциальная энергия системы в начальном состоянии;

P_2 - потенциальная энергия системы в конечном состоянии.



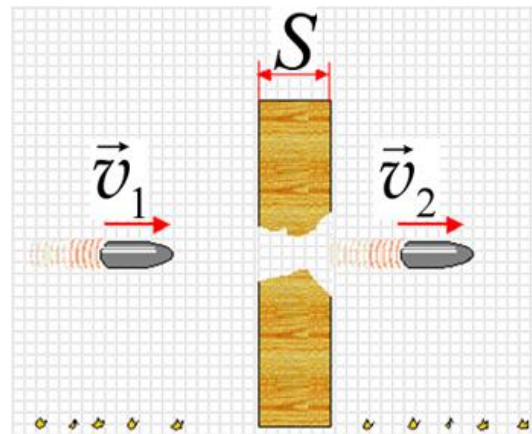
Теорема о кинетической энергии

Изменение кинетической энергии тела равно сумме работ всех сил, действующих на это тело:

$$\sum A_i = T_2 - T_1,$$

где T_1 - кинетическая энергия тела в начальном состоянии;

T_2 - кинетическая энергия тела в конечном состоянии.



Следует помнить, что все законы сохранения и изменения необходимо записывать относительно одной и той же инерциальной системы отсчёта (обычно относительно Земли).

Виды ударов

Ударом называется кратковременное взаимодействие двух или более тел.

Упругим называется удар, при котором тела после взаимодействия движутся раздельно друг от друга.

Неупругим называется удар, при котором тела после взаимодействия движутся как единое целое, то есть с одной и той же скоростью.

При всех видах ударов происходят потери механической энергии системы сталкивающихся тел: часть энергии затрачивается на деформацию тел (возникают всякого рода вмятины, трещинки и т.д.), часть уносится звуковыми волнами (мы слышим удар), часть переходит в теплоту (тела при ударе нагреваются) и т. д.

Предельными случаями ударов являются **абсолютно упругий** и **абсолютно неупругий** удары, которые в чистом виде в природе не встречаются.

Идеализацией **абсолютно упругого удара** является то, что механическая энергия системы не изменяется, а идеализацией **абсолютно неупругого удара** является то, что все потери механической энергии происходят только в виде теплоты.

Абсолютно упругий удар

1. выполняется закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

2. закон сохранения полной механической энергии:

$$\frac{mv_{01}^2}{2} + \frac{mv_{02}^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2}$$

Абсолютно неупругий удар

1. выполняется закон сохранения импульса

$$m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = (m_1 + m_2) \vec{v}$$

2. закон сохранения и превращения энергии:

$$\frac{m_1 v_{01}^2}{2} + \frac{m_2 v_{02}^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + \left\{ \begin{array}{l} Q \\ \Delta U \end{array} \right.$$

где Q – количество теплоты, выделившееся в результате удара, ΔU – изменение внутренней энергии тел в результате удара.

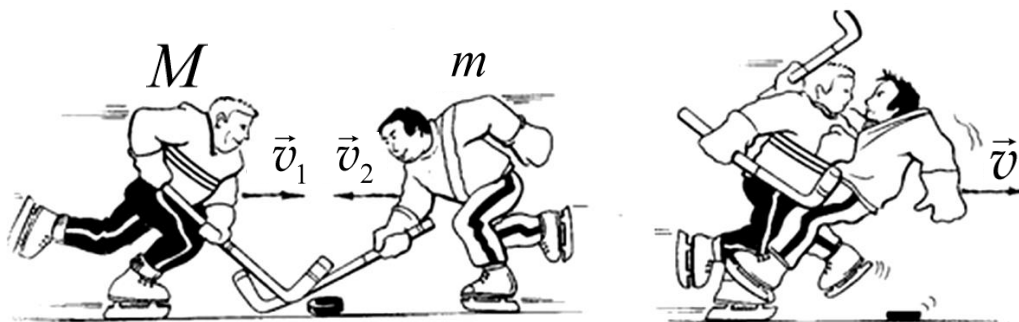
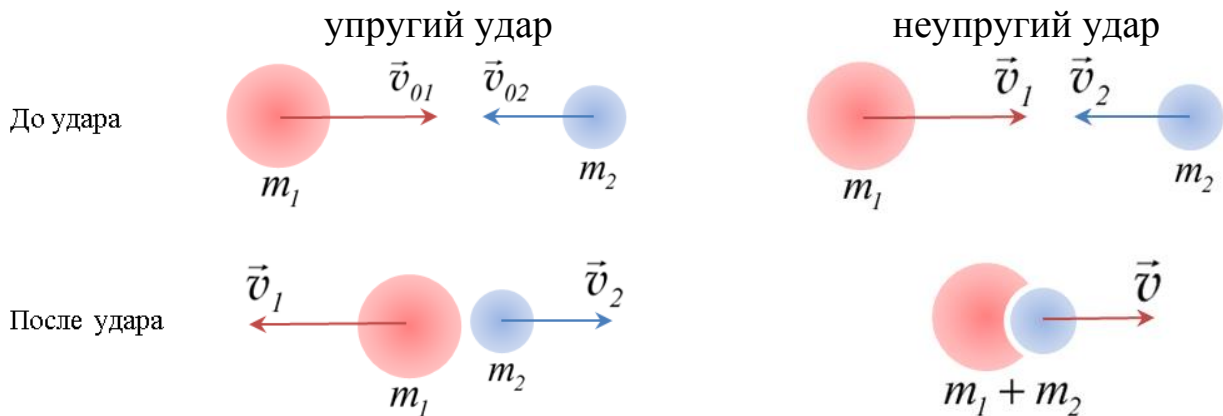


Схема решения задач на законы изменения или сохранения импульса

(эти законы применяются, при рассмотрении поступательного движения тел системы).

1. Сделайте два рисунка, на которых изобразите ситуацию, рассматриваемую в задаче, непосредственно перед взаимодействием и сразу после него. Здесь же укажите направления векторов скоростей или импульсов всех тел системы.
2. Проанализируйте все силы, действующие на тела системы в течение всего времени взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени система замкнута или взаимодействие происходит очень кратковременно (удар, разрыв снаряда, выстрел), то запишите закон сохранения импульса для рассматриваемой системы в векторном виде

$$\sum \vec{p}_{i1} = \sum \vec{p}_{i2},$$

где $\sum \vec{p}_{i1}$ - векторная сумма импульсов тел системы непосредственно перед взаимодействием;

$\sum \vec{p}_{i2}$ - векторная сумма импульсов тел системы сразу после взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени система не замкнута, то запишите закон изменения импульса в виде

$$\left(\sum \vec{F}_i^{\text{внешних}} \right) t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1,$$

где $\sum \vec{F}_i^{\text{внешних}}$ - векторная сумма всех внешних сил, действующих на тела рассматриваемой механической системы;

t - время действия сил на тела системы;

$\vec{p}_1 = \sum \vec{p}_{i1}$ - векторная сумма импульсов тел системы непосредственно перед взаимодействием;

$\vec{p}_2 = \sum \vec{p}_{i2}$ - векторная сумма импульсов тел системы сразу после взаимодействия.

3. Выберите подходящую систему координат и спроецируйте векторные уравнения на оси координат.

При этом помните, что импульсы всех тел должны быть записаны относительно одной и той же системы координат (обычно относительно Земли).

4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

Закон сохранения импульса связывает начальное и конечное значения импульса системы при *её поступательном движении* и позволяет *исключить из рассмотрения внутренние силы*, которые изменить импульс системы не могут. Поэтому этот закон применяют при решении задач, в которых силы взаимодействия между телами системы либо являются величинами переменными и их трудно учесть, либо вообще неизвестными.

К таким задачам обычно относятся задачи на выстрелы, разрывы снарядов или удары тел, а так же движение одних тел по поверхности других.

При решении задач на удары следует помнить, что если удар абсолютно упругий и трение между соприкасающимися телами отсутствует, то скорость тела в результате удара об упругую поверхность не изменяется по величине. При этом угол падения тела α на поверхность равен углу отражения β . Таким образом, скорость тела после отражения от упругой поверхности направлена под тем же углом, под которым оно на поверхность падало.

При абсолютно неупругом ударе двух тел, движущихся навстречу друг другу, скорость их совместного движения будет направлена в ту сторону, куда до столкновения двигалось тело с большим импульсом.



На законе сохранения импульса основано *реактивное движение* – это движение, возникающее вследствие отделения от тела его части с некоторой скоростью относительно самого тела. Благодаря реактивному движению возможно перемещение тел в космосе (то есть в безвоздушном пространстве).

Поэтому задачи на реактивное движение решаются с применением закона сохранения импульса механической системы.

При этом реактивная сила, возникающая при движении, равна

$$\vec{F}_{\text{реакт}} = - \frac{\Delta m}{\Delta t} \vec{v}_{\text{отн}},$$

где $\vec{F}_{\text{реакт}}$ - реактивная сила, Н;

$\frac{\Delta m}{\Delta t}$ - скорость изменения массы тела со временем, $\frac{\text{кг}}{\text{с}}$;

$\vec{v}_{\text{отн}}$ - скорость истечения газов относительно корпуса ракеты, $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Схема решения задач на законы изменения или сохранения момента импульса

*(эти законы применяются при рассмотрении вращательного
движения тел механической системы).*

1. Сделайте два рисунка, на которых изобразите ситуацию, рассматриваемую в задаче непосредственно перед взаимодействием и сразу после взаимодействия. Здесь же укажите направления векторов линейных и угловых скоростей или моментов импульсов всех тел системы.

2. Проанализируйте моменты всех внешних сил, действующих на тела системы в течение всего времени взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени моменты всех внешних сил относительно оси вращения Z не скомпенсированы, то запишите закон изменения момента импульса относительно этой оси Z в виде

$$\left(\sum M_{iz}^{\text{внешних}}\right)t = L_{2z} - L_{1z},$$

где $\sum M_{iz}^{\text{внешних}}$ - сумма моментов всех внешних сил, действующих на тела системы, относительно оси вращения Z ;

t - время действия внешних сил;

$L_{1z} = \left(\sum L_{iz}\right)_{\text{перед}}$ - момент импульса системы непосредственно перед взаимодействием;

$L_{2z} = \left(\sum L_{iz}\right)_{\text{после}}$ - момент импульса системы сразу после взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени моменты всех внешних сил относительно оси вращения Z скомпенсированы или взаимодействие происходит очень кратковременно (удар, разрыв снаряда, выстрел), то запишите закон сохранения момента импульса относительно выбранной оси для рассматриваемой системы в виде

$$\left(\sum L_{iz}\right)_{\text{перед}} = \left(\sum L_{iz}\right)_{\text{после}}.$$

Если за рассматриваемый промежуток времени проекции моментов всех внешних сил, действующих на систему, на какую-либо ось Z в пространстве равны нулю, то запишите закон сохранения проекции момента импульса на направление этой оси:

$$\left(\sum L_{iz}\right)_{\text{перед}} = \left(\sum L_{iz}\right)_{\text{после}},$$

где $\left(\sum L_{iz}\right)_{\text{перед}}$ - сумма проекций моментов импульсов тел системы на ось Z непосредственно перед взаимодействием;

$\left(\sum L_{iz}\right)_{\text{после}}$ - сумма проекций моментов импульсов тел системы на ось Z сразу после взаимодействия.

При этом помните, что моменты всех сил и моменты импульсов всех тел системы должны быть записаны относительно одной и той же оси вращения Z.

4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

Законы сохранения или изменения момента импульса связывают начальное и конечное значения момента импульса системы *при её вращательном движении и позволяют исключить из рассмотрения внутренние силы*, которые изменить момент импульса всей системы не могут.

Поэтому эти законы применяют при решении задач, в которых силы взаимодействия между телами системы либо являются величинами переменными и их трудно учесть, либо вообще неизвестными.

К таким задачам обычно относятся задачи на выстрелы, разрывы снарядов или удары тел.

Схема решения задач на законы изменения или сохранения полной механической энергии

1. Сделайте рисунок, на котором укажите начальное и конечное положение тела, а также его скорость в начальном и конечном положениях. Укажите начальный уровень отсчёта потенциальной энергии (обычно он выбирается по самой нижней точке траектории тела или от положения равновесия системы).

2. Проанализируйте все силы, действующие на тела системы за рассматриваемый промежуток времени.

Если за рассматриваемый промежуток времени на тела системы действуют только консервативные силы ($F_{\text{грав}}, F_{\text{тяж}}, F_{\text{упр}}, F_{\text{кулона}}, F_{\text{арх}}$) или все действующие на систему неконсервативные силы не совершают работу за этот промежуток времени, то запишите закон сохранения полной механической энергии для рассматриваемой системы в виде

$$E_1 = E_2.$$

Если за рассматриваемый промежуток времени на тела системы действуют неконсервативные силы, которые совершают работу над телами системы, то запишите закон изменения полной механической энергии в виде

$$\sum A_i^{\text{неконс}} = E_2 - E_1,$$

где $\sum A_i^{\text{неконс}}$ - сумма работ всех неконсервативных сил, действующих на тела механической системы;

$E_1 = T_1 + \Pi_1$ - полная механическая энергия системы в начальный момент времени;

$E_2 = T_2 + \Pi_2$ - полная механическая энергия системы в конечный момент времени.

При этом помните, что скорости всех тел и работы всех сил должны быть записаны относительно одной и той же системы координат (обычно относительно Земли).

3. Распишите работу всех сил и полную механическую энергию тела или системы тел в начальном и конечном положениях.

4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

Следует помнить, что некоторая группа задач (обычно это задачи на движение одного тела по поверхности другого тела, между которыми отсутствуют силы трения) для их решения требует одновременного применения закона сохранения импульса и закона сохранения полной механической энергии. Эти законы вместе с уравнениями динамики составляют полную систему уравнений, необходимых для решения данной задачи.

Схема решения задач на применение теоремы о кинетической энергии

1. Сделайте рисунок, на котором укажите начальное и конечное положения тела, а также его скорость в начальном и конечном положениях.

2. Проанализируйте все силы, действующие на тело за рассматриваемый промежуток времени.

3. Запишите теорему о кинетической энергии в виде $\sum A_i = T_2 - T_1$,

где $\sum A_i$ - сумма работ всех сил, действующих на тела механической системы;

$T_1 = \sum T_{i1}$ - кинетическая энергия системы в начальный момент времени;

$T_2 = \sum T_{i2}$ - кинетическая энергия системы в начальный момент времени.

4. Распишите работу всех сил и кинетическую энергию тела в начальном и конечном положениях.
5. Решите полученную систему уравнений.

Схема решения задач на применение теоремы о потенциальной энергии

Если в задаче требуется найти работу консервативной силы ($F_{грав}, F_{тяж}, F_{упр}, F_{кулона}, F_{арх}$), то удобно применить теорему о потенциальной энергии. В этом случае алгоритм решения следующий:

1. сделайте рисунок, на котором укажите начальное и конечное положения тела (или тел), а также выберите начальный уровень отсчёта потенциальной энергии;

2. запишите теорему о потенциальной энергии: $A_{конс} = -(P_2 - P_1)$,

где $A_{конс}$ - работа консервативной силы, действующей на тело;

P_1 - потенциальная энергия тела в начальный момент времени;

P_2 - потенциальная энергия тела в конечный момент времени,

3. решите данное уравнение.

Законы изменения в неинерциальных системах отсчёта

Так как силы инерции всегда являются силами внешними, следовательно, в неинерциальных системах отсчёта не выполняются законы сохранения импульса, момента импульса и полной механической энергии. Однако если учесть силы инерции, то будут справедливы следующие законы изменения.

Закон изменения импульса механической системы в неинерциальной системе отсчёта

В неинерциальной системе отсчёта векторная сумма всех внешних сил, действующих на тела механической системы с учётом всех сил инерции, равна скорости изменения импульса этой механической системы:

$$\sum \vec{F}_i + \sum \vec{F}_{i \text{ инерц}} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Закон изменения момента импульса механической системы в неинерциальной системе отсчёта

В неинерциальной системе отсчёта векторная сумма моментов всех внешних сил, действующих на тела механической системы относительно неподвижной точки O с учётом моментов всех сил инерции, равна скорости изменения момента импульса этой механической системы относительно той же точки O :

$$\sum \vec{M}_i + \sum \vec{M}_{i \text{ инерц}} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Закон изменения полной механической энергии системы в неинерциальной системе отсчёта

В неинерциальной системе отсчёта алгебраическая сумма работ всех неконсервативных сил, действующих на тела механической системы с учётом работы всех сил инерции, равна изменению полной механической энергии этой механической системы:

$$\sum A_{\text{неконсерв}} + \sum A_{\text{инерц}} = E_2 - E_1$$

Примеры решения задач на законы изменения и сохранения в механике

Задача 19. Невесомая нерастяжимая нить, намотанная на однородный сплошной цилиндр, прикреплена к потолку. Найти ускорение a , с которым падает этот цилиндр под действием силы тяжести.

Ответ: $a = 6,7 \frac{m}{c^2}.$

Анализ задачи

Цилиндр по условию задачи вращается вокруг собственной оси, которая в свою очередь движется поступательно с ускорением a . Это ускорение нам необходимо найти.

Для решения этой задачи необходимо записать уравнение динамики вращательного движения для цилиндра и закон движения его центра масс.

Схема решения задач по динамике вращательного движения абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси

1. Сделайте чертёж к задаче, на котором нарисуйте тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, и все силы, действующие на него, с учётом точек приложения сил.

2. Если тело покоится, то ось вращения можно выбирать произвольно. Причём относительно любой оси вращения должно выполняться условие $\sum M_{z_i} = 0$. Поэтому, ось выбирают обычно так, чтобы через неё проходило как можно больше линий действия сил.

При необходимости можно записать несколько уравнений моментов относительно разных осей.

Так как тело поступательно не движется, следовательно, относительно центра масс тела выполняется условие $\sum \vec{F}_i = 0$.

Итак,

- если тело неподвижно или вращается вокруг оси Z равномерно, то запишите основное уравнение динамики вращательного движения тела относительно оси Z в виде $\sum M_{zi} = 0$;

- если тело вращается вокруг оси Z равноускоренно, то запишите основное уравнение динамики вращательного движения тела в виде

$$\sum M_{zi} = I_z \varepsilon.$$

При этом правильно определяйте плечи сил d . Для этого опускайте перпендикуляр от оси вращения до линии действия силы.

3. Решите полученную систему уравнений.

Закон движения центра масс

В инерциальной системе отчёта центр масс механической системы движется как материальная точка, имеющая массу всей системы, на которую действует сила, равная векторной сумме всех внешних сил, действующих на тела этой механической системы:

$$\sum \vec{F}_i^{\text{внеш}} = m \vec{a}_c.$$

Решение

Рассмотрим все силы, действующие на движущийся цилиндр.

По условию задачи, он не имеет электрического заряда, не намагничен и по нему не протекает электрический ток. Поэтому электрическое, магнитное и электромагнитное поля на него действовать не будут. Однако цилиндр обладает массой, поэтому на

него будет действовать сила тяжести со стороны гравитационного поля Земли.

Кроме силы тяжести, на цилиндр будет действовать ещё сила натяжения нити $\vec{T}_1$.

Так как среда, в которой движется цилиндр, не указана, то предполагается, что всё происходит в вакууме и, следовательно, сила Архимеда и сила сопротивления воздуха равны нулю.

Силами гравитационного притяжения $\vec{F}_{\text{гп}}$ к окружающим цилиндр телам из-за их малой величины также пренебрегаем.

Запишем уравнение динамики вращательного движения для цилиндра в произвольный момент времени относительно оси вращения цилиндра (точка O) и закон движения центра масс цилиндра.

В итоге получим систему уравнений:

$$\begin{cases} M_{mg} + M_T = I \varepsilon \end{cases} \quad (19.1)$$

$$\begin{cases} \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \end{cases} \quad (19.2)$$

Распишем уравнение (19.1) относительно оси вращения цилиндра O .

При этом учтём, что момент инерции цилиндра

относительно его оси симметрии равен $I = \frac{mR^2}{2}$, а

угловое ускорение цилиндра ε связано с тангенциальным ускорением a_τ точек на ободу цилиндра соотношением $a_\tau = \varepsilon R$, причём $a_\tau = a$, где a - искомое ускорение цилиндра.

Уравнение (19.2) спроецируем на вертикальную ось OY .

В результате получим

$$\begin{cases} 0 + TR = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow \begin{cases} T = \frac{ma}{2} \end{cases} \end{cases} \quad (19.3)$$

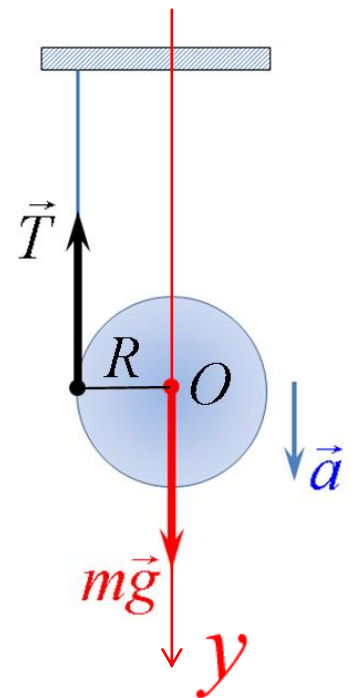
$$\begin{cases} mg - T = ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = mg - ma = m(g - a) \end{cases} \quad (19.4)$$

Приравняем (19.3) = (19.4):

$$\frac{ma}{2} = m(g - a) \Rightarrow a = 2(g - a) \Rightarrow a = 2g - 2a \Rightarrow a = \frac{2}{3}g.$$

$$\text{Отсюда } a = \frac{2}{3} \cdot 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \approx 6,7 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

$$\text{Ответ: } a = 6,7 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$



Задача 20. На горизонтальной поверхности с малым коэффициентом трения $\mu = 0,05$ покоится ящик с песком массой $M = 10 \text{ кг}$. В ящик попадает пуля, массой $m = 5 \text{ г}$, летевшая со скоростью $v_1 = 0,7 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. С какой скоростью v начнёт двигаться ящик с пулей сразу после удара? Время торможения пули в ящике с песком t очень мало.

Ответ: $v \approx 0,18 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Дано:

$$M = 10 \text{ кг}$$

$$m = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$$

$$v_1 = 700 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$v_2 = 0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\mu = 0,05$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$v = ?$$

Анализ задачи

Решить эту задачу используя кинематический или динамический метод решения для ящика с песком нельзя, так как не известна формула силы, возникающей в результате взаимодействия пули с песком в ящике.

Однако эту трудность можно преодолеть, если применить закон изменения импульса для механической системы «пуля + ящик», который позволяет не включать в рассмотрение внутренние силы, возникающие в момент взаимодействия пули с ящиком. Поэтому применим соответствующую схему решения задач.

Схема решения задач на законы изменения или сохранения импульса

1. Сделайте два рисунка, на которых изобразите ситуацию, рассматриваемую в задаче, непосредственно перед взаимодействием и сразу после него. Здесь же укажите направления векторов скоростей или импульсов всех тел системы.
2. Проанализируйте все силы, действующие на тела системы в течение всего времени взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени система замкнута или взаимодействие происходит очень кратковременно (удар, разрыв снаряда, выстрел), то запишите закон сохранения импульса для рассматриваемой системы в векторном виде

$$\sum \vec{p}_{i1} = \sum \vec{p}_{i2},$$

где $\sum \vec{p}_{i1}$ - векторная сумма импульсов тел системы непосредственно перед взаимодействием;

$\sum \vec{p}_{i2}$ - векторная сумма импульсов тел системы сразу после взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени система не замкнута, то запишите закон изменения импульса в виде

$$\left(\sum \vec{F}_i^{\text{внешних}} \right) t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1,$$

где $\sum \vec{F}_i^{\text{внешних}}$ - векторная сумма всех внешних сил, действующих на тела рассматриваемой механической системы;

t - время действия сил на тела системы;

$\vec{p}_1 = \sum \vec{p}_{i1}$ - векторная сумма импульсов тел системы непосредственно перед взаимодействием;

$\vec{p}_2 = \sum \vec{p}_{i2}$ - векторная сумма импульсов тел системы сразу после взаимодействия.

3. Выберите подходящую систему координат и спроецируйте векторные уравнения на оси координат.

При этом помните, что импульсы всех тел должны быть записаны относительно одной и той же системы координат (обычно относительно Земли).

4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

Решение

Делаем рисунки по условию задачи для моментов времени непосредственно перед ударом пули о ящик с песком и сразу после окончания удара (см. рис.20.1).

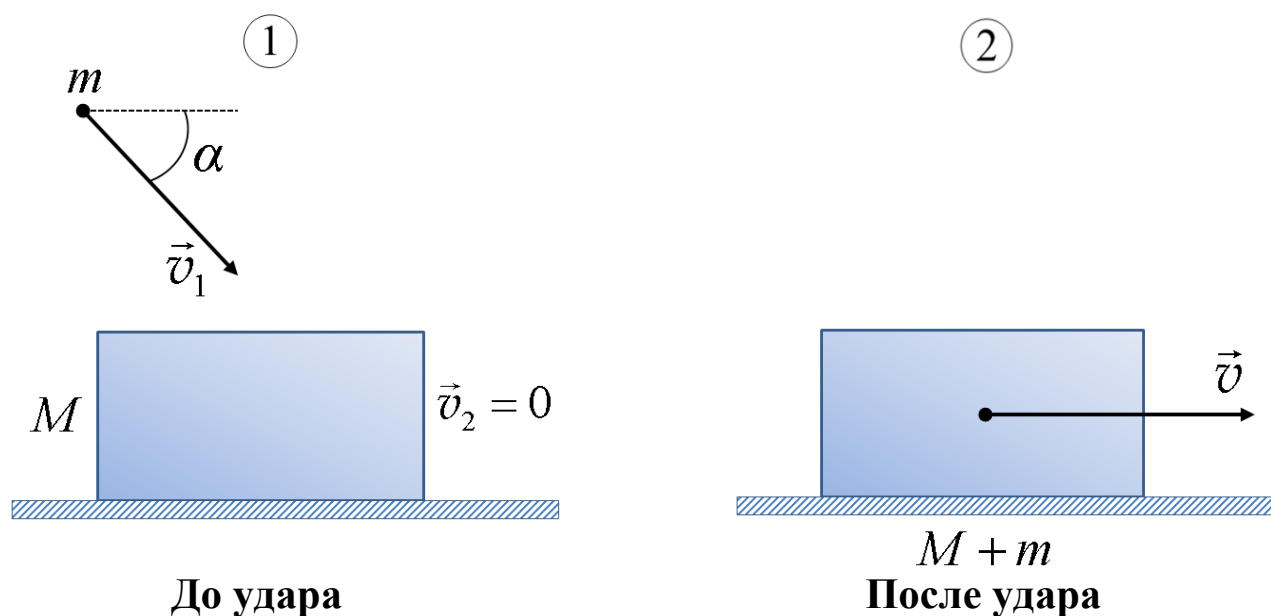


Рис.20.1

Напомним, что внутренние силы, действующие между телами механической системы, изменить импульс системы не могут. Поэтому проанализируем все внешние силы, действующие на механическую систему «пуля + ящик» во время удара (см. рис 20.2).

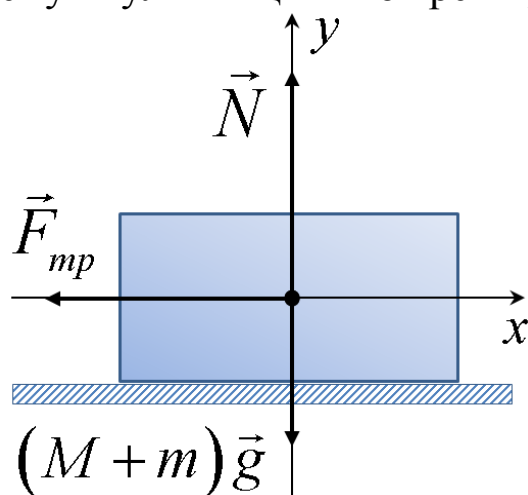


Рис.20.2

Это силы тяжести $M\vec{g}$ и $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$.

Силы трения, возникающие между пулей и песком во время удара являются внутренними.

По условию задачи коэффициент трения между ящиком и поверхностью мал. Это означает, что после попадания пули в ящик, он начнёт скользить по поверхности (в противном случае ящик остался бы в покое).

Из анализа рис.20.2 видно, что система во время удара была незамкнутой. Это следует из того, что векторная сумма всех внешних сил не может быть равной нулю. Из рисунка видно, что сила трения $\vec{F}_{тр}$ ничем не может быть скомпенсирована, да и сила реакции опоры $\vec{N}$ в момент удара должна быть во много раз больше суммарной силы тяжести $(M + m)\vec{g}$ для того, чтобы погасить вертикальную составляющую импульса пули во время удара.

Таким образом, системы «пуля + ящик» в момент попадания пули оказывается не замкнутой, поэтому запишем для неё закон изменения импульса в виде

$$\left(\sum \vec{F}_i^{\text{внешних}}\right)t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1.$$

Согласно рис.20.2 имеем

$$(M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр})t = (M + m)\vec{v} - (m\vec{v}_1 + 0). \quad (20.1)$$

Спроецируем уравнение (20.1) на горизонтальную ось ОХ и вертикальную ось ОУ (см. рис.20.1 и 20.2):

$$\text{На ОХ: } (0 + 0 + 0 - \mu N)t = (M + m)v - mv_1 \cos \alpha$$

$$\text{На ОУ: } (N - Mg - mg + 0)t = 0 - (-mv_1 \sin \alpha)$$

Окончательно имеем

$$\text{На ОХ: } -\mu N t = (M + m)v - mv_1 \cos \alpha \quad (20.2)$$

$$\text{На ОУ: } (N - Mg - mg)t = mv_1 \sin \alpha \quad (20.3)$$

Из уравнения (20.3):

$$N = \frac{mv_1 \sin \alpha}{t} + (M + m)g. \quad (20.4)$$

Подставим (20.4) в (20.2):

$$-\mu \left(\frac{mv_1 \sin \alpha}{t} + (M + m)g \right) t = (M + m)v - mv_1 \cos \alpha, \Rightarrow,$$

$$-\mu mv_1 \sin \alpha - \mu (M + m)gt = (M + m)v - mv_1 \cos \alpha. \quad (20.5)$$

Так как по условию задачи временем взаимодействия пули и песка t можно пренебречь, то уравнение (20.5) примет вид

$$-\mu mv_1 \sin \alpha = (M + m)v - mv_1 \cos \alpha. \quad (20.6)$$

Из уравнения (20.6) выразим скорость ящика v после попадания пули:

$$v = \frac{mv_1 \cos \alpha - \mu m v_1 \sin \alpha}{M + m}, \Rightarrow,$$

$$v = \frac{mv_1 (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)}{M + m}. \quad (20.7)$$

Проверим размерность уравнения (20.7). $\left[\frac{M}{C} \right] = \frac{KZ \cdot \frac{M}{C}}{KZ + KZ} = \frac{KZ \cdot \frac{M}{C}}{KZ} = \frac{M}{C}.$

Так как размерность уравнения (20.7) совпала, подставим в него данные из условия задачи и получим

$$v = \frac{5 \cdot 10^{-3} KZ \cdot 700 \frac{M}{C} (0,5 - 0,05 \cdot 0,86)}{10 KZ + 5 \cdot 10^{-3} KZ} \approx 0,18 \frac{M}{C}. \text{ Ответ: } v \approx 0,18 \frac{M}{C}.$$

Задача 21. Железнодорожная платформа с закрепленным на ней орудием суммарной массой $M = 20\text{ т}$ движется со скоростью $v_0 = 2 \frac{M}{C}$. Из орудия выпущен снаряд массой $m = 20\text{ кг}$ с начальной скоростью $v_c = 0,7 \frac{KM}{C}$ относительно Земли под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту в направлении противоположном движению платформы. Определите скорость платформы v_{II} сразу после выстрела.

Ответ: $v_{II} = 2,35 \frac{M}{C}.$

Дано:

$$M = 20 \cdot 10^3 \text{ кг}$$

$$m = 20 \text{ кг}$$

$$v_0 = 2 \frac{M}{C}$$

$$v_c = 0,7 \frac{KM}{C}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$v_{II} - ?$$

Анализ задачи

Определить скорость платформы v_{II} из уравнений кинематики не получится, так как не известен промежуток времени, в течение которого был произведён выстрел. Поэтому проведём анализ на возможность применения закона сохранения импульса для механической системы «ЖД платформа + снаряд».

В качестве инерциальной системы отсчёта выберем поверхность Земли.

Рассмотрим все внешние силы, действующие на ДЖ-платформу и снаряд за время выстрела (см. рис.21.1).

Перед выстрелом

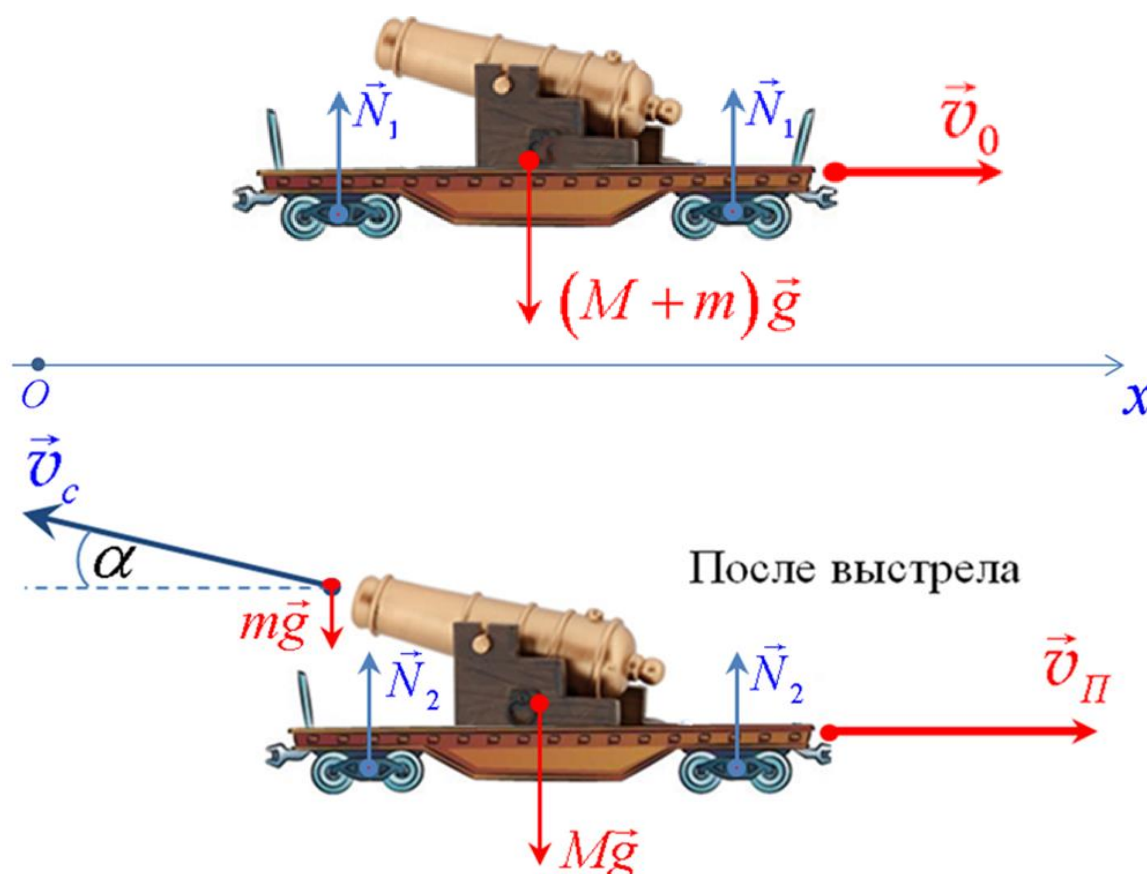


Рис.21.1

По условию задачи, ЖД-платформа и снаряд не имеют электрического заряда, не намагничены и по ним не протекает электрический ток. Поэтому электрическое, магнитное и электромагнитное поля на них действовать не будут. Однако платформа и снаряд обладают массой, поэтому на них будет действовать сила тяжести со стороны гравитационного поля Земли.

На ЖД-платформу будут действовать ещё силы реакции опоры $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ со стороны рельсов.

Так как среда, в которой движутся платформа и снаряд, не указана, то предполагается, что всё происходит в вакууме и, следовательно, силы Архимеда и силы сопротивления воздуха равны нулю.

Силы гравитационного притяжения $\vec{F}_{gr}$ к окружающим платформу и снаряд телам из-за их малой величины не учитываем.

Силой трения качения ввиду её малости относительно основных сил также пренебрегаем.

Остальные силы, в том числе и силы давления пороховых газов, возникающие в момент выстрела, являются внутренними и на импульс системы влияния не оказывают.

Из анализа первого закона Ньютона следует, что до выстрела сила тяжести компенсировалась силами реакции опоры (так как вдоль вертикальной оси ускорение нашей механической системы было равно нулю).

Однако во время выстрела компенсация этих сил была нарушена, так как появилась вертикальная составляющая импульса нашей механической системы (снаряд полетел под углом к горизонту).

Следовательно, во время выстрела система «ЖД платформа + снаряд» была незамкнута и применять для неё закон сохранения импульса в векторном виде нельзя.

Однако для незамкнутых механических систем можно применить закон сохранения проекции импульса, если проекции всех внешних сил, действующих на систему, на какое-либо направление в пространстве равны нулю. В нашем случае проекции всех внешних сил (сил тяжести и сил реакции опоры) на горизонтальное направление в течение всего времени выстрела равны нулю. Поэтому будет сохраняться проекция импульса нашей механической системы «ЖД-платформа + снаряд» на горизонтальную ось ОХ.

Схема решения задач на законы изменения или сохранения импульса

1. Сделайте два рисунка, на которых изобразите ситуацию, рассматриваемую в задаче, непосредственно перед взаимодействием и сразу после него. Здесь же укажите направления векторов скоростей или импульсов всех тел системы.

2. Проанализируйте все силы, действующие на тела системы в течение всего времени взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени система замкнута или взаимодействие происходит очень кратковременно (удар, разрыв снаряда, выстрел), то запишите закон сохранения импульса для рассматриваемой системы в векторном виде

$$\sum \vec{p}_{i1} = \sum \vec{p}_{i2},$$

где $\sum \vec{p}_{i1}$ - векторная сумма импульсов тел системы непосредственно перед взаимодействием;

$\sum \vec{p}_{i2}$ - векторная сумма импульсов тел системы сразу после взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени система не замкнута, то запишите закон изменения импульса в виде

$$\left(\sum \vec{F}_i^{\text{внешних}}\right)t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1,$$

где $\sum \vec{F}_i^{\text{внешних}}$ - векторная сумма всех внешних сил, действующих на тела рассматриваемой механической системы;

t - время действия сил на тела системы;

$\vec{p}_1 = \sum \vec{p}_{i1}$ - векторная сумма импульсов тел системы непосредственно перед взаимодействием;

$\vec{p}_2 = \sum \vec{p}_{i2}$ - векторная сумма импульсов тел системы сразу после взаимодействия.

3. Выберите подходящую систему координат и спроецируйте векторные уравнения на оси координат.

При этом помните, что импульсы всех тел должны быть записаны относительно одной и той же системы координат (обычно относительно Земли).

4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

Решение

Итак, согласно пункту 1 схемы решения задач, делаем рисунки для начального момента выстрела и для конечного момента выстрела (см. рис.21.2).

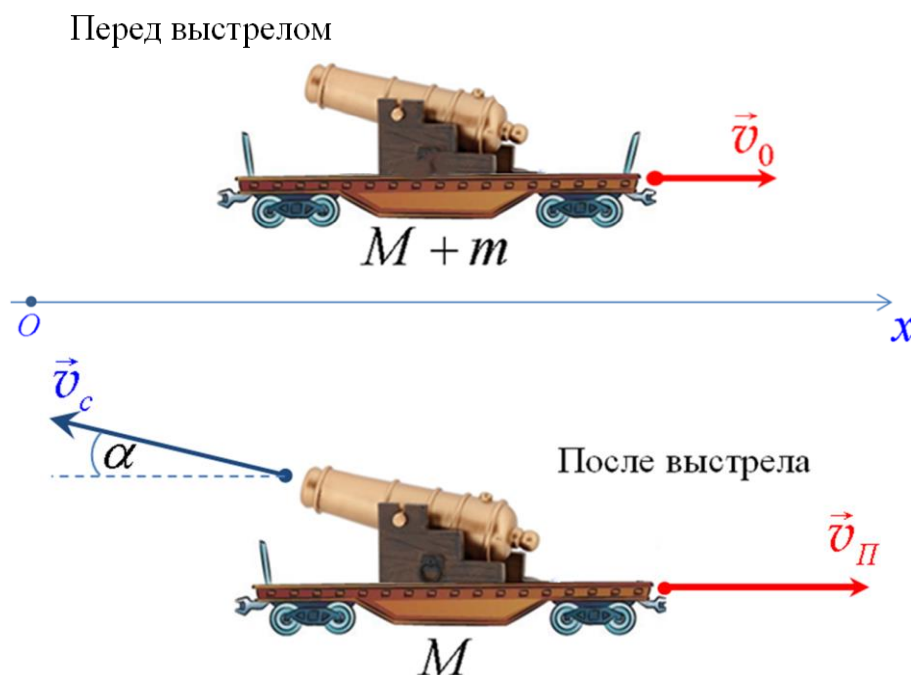


Рис.21.2

Согласно анализу задачи, проекции всех внешних сил, действующих на систему, на горизонтальную ось ОХ равны нулю. Следовательно, на это направление в пространстве можно записать закон сохранения проекции импульса для механической системы «ЖД-платформа + снаряд»:

$$(M + m)v_0 = Mv_{\Pi} - mv_c \cos \alpha.$$

Отсюда, скорость платформы сразу после выстрела равна

$$v_{\Pi} = \frac{(M + m)v_0 + mv_c \cos \alpha}{M}.$$

Подставив данные из условия задачи, получим

$$v_{\Pi} = \frac{(20 \cdot 10^3 \text{ кг} + 20 \text{ кг}) \cdot 2 \frac{\text{м}}{\text{с}} + 20 \text{ кг} \cdot 700 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{1}{2}}{20 \cdot 10^3 \text{ кг}} = 2.35 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $v_{\Pi} = 2.35 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$

Задача 22. Маховик, имеющий вид диска радиусом $R = 40 \text{ см}$ и массой $M = 48 \text{ кг}$, может вращаться вокруг горизонтальной оси. На его цилиндрическую поверхность намотана невесомая нерастяжимая нить, к другому концу которой прикреплен груз массой $m = 0,2 \text{ кг}$. Груз был приподнят на некоторую высоту и затем отпущен. Упав свободно с высоты $h = 280 \text{ см}$, груз натянул нить и благодаря этому привёл маховик во вращение. Какую угловую скорость ω груз сообщил при этом маховику? Нить во время удара не проскальзывает по поверхности маховика.

Ответ: $\omega = 0,16 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$

Анализ задачи

Дано:
 $M = 48 \text{ кг}$
 $m = 0,2 \text{ кг}$
 $R = 0,4 \text{ м}$
 $h = 2,8 \text{ м}$

$\omega - ?$

Определить угловую скорость маховика ω из уравнений кинематики нельзя, так как не известно время взаимодействия нити с маховиком. Однако можно предположить, что это промежуток времени очень мал. Поэтому такое кратковременное взаимодействие можно рассматривать как удар и применить к этому процессу соответствующий закон сохранения.

Так как маховик после взаимодействия с нитью будет находиться во вращательном движении, следовательно, для механической системы «груз + маховик» необходимо применить закон сохранения момента импульса. Рассмотрим соответствующую схему решения задач.

Схема решения задач на законы изменения или сохранения момента импульса

1. Сделайте два рисунка, на которых изобразите ситуацию, рассматриваемую в задаче непосредственно перед взаимодействием и сразу после взаимодействия. Здесь же укажите направления векторов линейных и угловых скоростей или моментов импульсов всех тел системы.

2. Проанализируйте моменты всех внешних сил, действующих на тела системы в течение всего времени взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени моменты всех внешних сил относительно оси вращения Z не скомпенсированы, то запишите закон изменения момента импульса относительно этой оси Z в виде

$$\left(\sum M_{iz}^{\text{внешних}}\right)t = L_{2z} - L_{1z},$$

где $\sum M_{iz}^{\text{внешних}}$ - сумма моментов всех внешних сил, действующих на тела системы, относительно оси вращения Z ;

t - время действия внешних сил;

$L_{1z} = \left(\sum L_{iz}\right)_{\text{перед}}$ - момент импульса системы непосредственно перед взаимодействием;

$L_{2z} = \left(\sum L_{iz}\right)_{\text{после}}$ - момент импульса системы сразу после взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени моменты всех внешних сил относительно оси вращения Z скомпенсированы или взаимодействие происходит очень кратковременно (удар, разрыв снаряда, выстрел), то запишите закон сохранения момента импульса относительно выбранной оси для рассматриваемой системы в виде

$$\left(\sum L_{iz}\right)_{\text{перед}} = \left(\sum L_{iz}\right)_{\text{после}}.$$

Если за рассматриваемый промежуток времени проекции моментов всех внешних сил, действующих на систему, на какую - либо ось Z в пространстве равны нулю, то запишите закон сохранения проекции момента импульса на направление этой оси:

$$\left(\sum L_{iz}\right)_{\text{перед}} = \left(\sum L_{iz}\right)_{\text{после}},$$

где $\left(\sum L_{iz}\right)_{\text{перед}}$ - сумма проекций моментов импульсов тел системы на ось Z непосредственно перед взаимодействием;
 $\left(\sum L_{iz}\right)_{\text{после}}$ - сумма проекций моментов импульсов тел системы на ось Z сразу после взаимодействия.

4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

Решение

Итак, делаем рисунки для начального и конечного момента удара (см. рис.22.1).

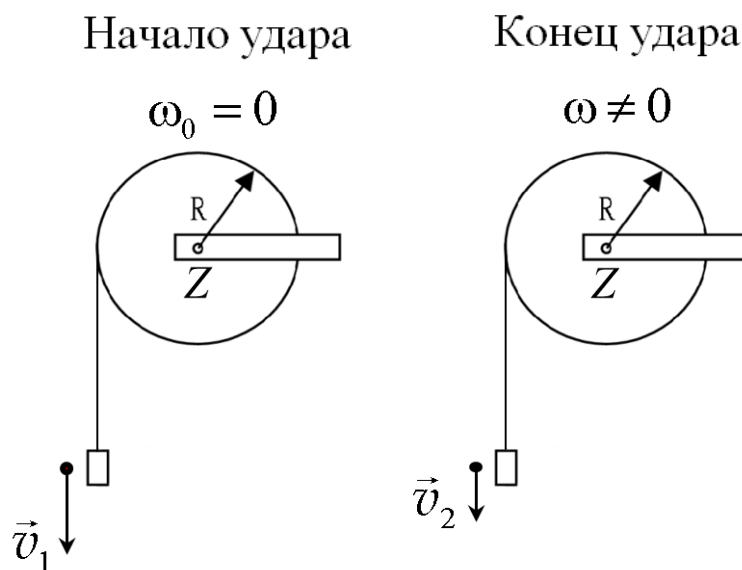


Рис.22.1

Запишем закон сохранения проекции момента импульса для системы «маховик + грузик» относительно горизонтальной оси вращения маховика Z:

$$L_{\Gamma_1} + L_{M_1} = L_{\Gamma_2} + L_{M_2}, \quad (22.1)$$

где

$L_{\Gamma_1} = mv_1 R$ - момент импульса грузика в начальный момент удара относительно оси вращения маховика (определяется как момент импульса материальной точки, движущейся поступательно);

$L_{M_1} = 0$ - момент импульса маховика в начальный момент удара (он равен нулю, так как маховик в начальный момент покоился);

$L_{\Gamma_2} = mv_2 R$ - момент импульса грузика в конечный момент удара;

$L_{M_2} = I_M \omega$ - момент импульса маховика в конечный момент удара.

Тогда уравнение (22.1) примет вид

$$mv_1R + 0 = mv_2R + I_M\omega, \quad (22.2)$$

где v_1 - скорость груза непосредственно перед ударом;

I_M - момент инерции маховика относительно оси вращения;

v_2 - скорость груза сразу после удара;

ω - угловая скорость вращения маховика сразу после удара.

Так как маховик по условию задачи представляет собой однородный диск, то его момент инерции относительно оси вращения (см. таблицу 1 на стр. 120), равен

$$I_M = \frac{MR^2}{2}. \quad (22.3)$$

Так как нить нерастяжима, то скорость груза сразу после удара v_2 связана с угловой скоростью маховика уравнением

$$v_2 = \omega R. \quad (22.4)$$

Подставим равенства (22.3) и (22.4) в (22.2):

$$mv_1R = m\omega R^2 + \frac{MR^2}{2}\omega,$$

следовательно,

$$mv_1R = \left(mR^2 + \frac{MR^2}{2} \right) \omega. \quad (22.5)$$

Скорость груза перед ударом v_1 определим по закону сохранения полной механической энергии для груза.

Схема решения задач на законы изменения или сохранения полной механической энергии

1. Сделайте рисунок, на котором укажите начальное и конечное положение тела, а также его скорость в начальном и конечном положениях. Укажите начальный уровень отсчёта потенциальной энергии (обычно он выбирается по самой нижней точке траектории тела или от положения равновесия системы).
2. Проанализируйте все силы, действующие на тела системы за рассматриваемый промежуток времени.

Если за рассматриваемый промежуток времени на тела системы действуют только консервативные силы ($F_{грав}$, $F_{тяж}$, $F_{упр}$, $F_{кулона}$, $F_{арх}$) или все действующие на систему неконсервативные силы за этот

промежуток времени не совершают работу, то запишите закон сохранения полной механической энергии для рассматриваемой системы в виде

$$E_1 = E_2.$$

Если за рассматриваемый промежуток времени на тела системы действуют неконсервативные силы, которые совершают работу над телами системы, то запишите закон изменения полной механической энергии в виде

$$\sum A_i^{\text{неконс}} = E_2 - E_1,$$

где $\sum A_i^{\text{неконс}}$ - сумма работ всех неконсервативных сил, действующих на тела механической системы;

$E_1 = T_1 + \Pi_1$ - полная механическая энергия системы в начальный момент времени;

$E_2 = T_2 + \Pi_2$ - полная механическая энергия системы в конечный момент времени.

При этом помните, что скорости всех тел и работы всех сил должны быть записаны относительно одной и той же системы координат (обычно относительно Земли).

3. Распишите работу всех сил и полную механическую энергию тела или системы тел в начальном и конечном положениях.

4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

Итак, делаем рисунок для начального и конечного положения грузика (см. рис.22.2). Начальный уровень отсчёта потенциальной энергии грузика выберем в конечной точке его падения (положение 2).

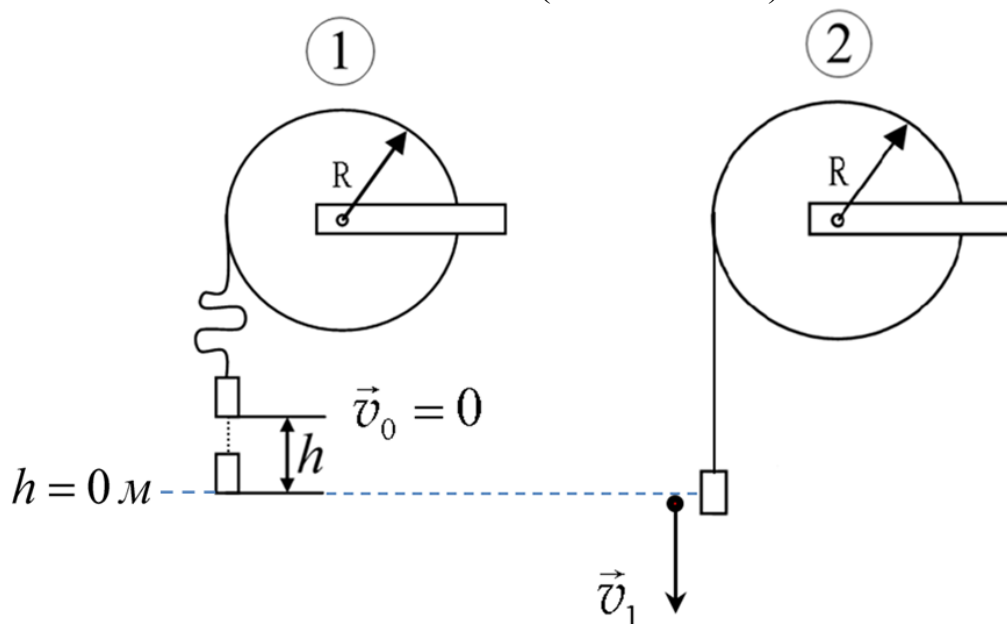


Рис.22.2

На грузик во время падения действует только консервативная сила тяжести (нить во время падения груза находится в ненапрянутом состоянии, поэтому сила натяжения нити равна нулю), поэтому для грузика будет выполняться *закон сохранения полной механической энергии*:

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2, \quad (22.6)$$

где $T_1 = 0$ - кинетическая энергия грузика в положении 1 (она равна нулю, так как скорость грузика в этой точке равна нулю);

$\Pi_1 = mgh$ - потенциальная энергия грузика в начальной точке падения (положение 1);

$T_2 = \frac{mv_1^2}{2}$ - кинетическая энергия грузика в конечной точке падения (положение 2);

$\Pi_2 = 0$ - потенциальная энергия грузика в конечной точке падения (положение 2). Она равна нулю, так как высота грузика над нулевым уровнем отсчёта потенциальной энергии равна нулю.

Тогда уравнение (22.6) примет вид

$$0 + mgh = \frac{mv_1^2}{2} + 0.$$

Отсюда

$$v_1 = \sqrt{2gh}. \quad (22.7)$$

Подставим (22.7) в (22.5):

$$m\sqrt{2gh} R = \left(mR^2 + \frac{MR^2}{2} \right) \omega, \quad (22.8)$$

Из (22.8) выразим угловую скорость маховика ω сразу после падения грузика:

$$\omega = \frac{m\sqrt{2gh} R}{mR^2 + \frac{MR^2}{2}} = \frac{m\sqrt{2gh} R}{\left(m + \frac{M}{2} \right) R^2} = \frac{m\sqrt{2gh}}{\left(\frac{2m + M}{2} \right) R} = \frac{2m\sqrt{2gh}}{(2m + M) R}$$

И, окончательно,
$$\omega = \frac{m\sqrt{8gh}}{(2m + M) R}. \quad (22.9)$$

Проверим размерность уравнения (22.9).

$$[\omega] = \left[\frac{1}{c} \right] = \frac{kz \sqrt{\frac{M}{c^2} \cdot M}}{(kz + kz) \cdot M} = \frac{kz \cdot \frac{M}{c}}{kz \cdot M} = \frac{1}{c}.$$

Подставив в уравнение (22.8) данные из условия задачи, получим

$$\omega = \frac{0,2 kz \cdot \sqrt{8 \cdot 10 \frac{M}{c^2} \cdot 2,8 M}}{(2 \cdot 0,2 kz + 48 kz) \cdot 0,4 M} = 0,16 \frac{рад}{с}.$$

Ответ: $\omega = 0,16 \frac{рад}{с}.$

Задача 23. На какой угол надо отклонить однородный стержень, подвешенный на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня, чтобы нижний конец стержня при прохождении им положения равновесия имел скорость 500 см/с? Длина стержня равна 170 см. Сопротивлением воздуха и силой Архимеда пренебречь.

Ответ: $\alpha = 30^\circ$

Анализ задачи

Дано: $v = 5 \frac{м}{с}$ $l = 1,7 м$	Определить угловую скорость стержня ω из уравнений кинематики нельзя, так как не известно время движения стержня из начального в конечное положение. Поэтому для решения задачи применим энергетический метод, в котором это время знать не нужно.
$\omega - ?$	При этом учтём тот факт, что стержень при перемещении из верхнего положения в нижнее находится во вращательном движении. Особенностью этого движения является то, что все точки тела имеют одну и ту же мгновенную угловую скорость ω.

Это позволяет определить скорость любой точки стержня по формуле связи между линейной скоростью точки v и её угловой скоростью ω :

$$v = \omega r,$$

где r - это расстояние от оси вращения до рассматриваемой точки тела.

Для определения угловой скорости стержня ω применим соответствующую схему решения задач.

Схема решения задач на законы изменения или сохранения полной механической энергии

1. Сделайте рисунок, на котором укажите начальное и конечное положение тела, а также его скорость в начальном и конечном положениях. Укажите начальный уровень отсчёта потенциальной энергии (обычно он выбирается по самой нижней точке траектории тела или от положения равновесия системы).
2. Проанализируйте все силы, действующие на тела системы за рассматриваемый промежуток времени.

Если за рассматриваемый промежуток времени на тела системы действуют только консервативные силы ($F_{грав}$, $F_{тяж}$, $F_{упр}$, $F_{кулона}$, $F_{арх}$) или все действующие на систему неконсервативные силы не совершают работу за этот промежуток времени, то запишите закон сохранения полной механической энергии для рассматриваемой системы в виде

$$E_1 = E_2.$$

Если за рассматриваемый промежуток времени на тела системы действуют неконсервативные силы, которые совершают работу над телами системы, то запишите закон изменения полной механической энергии в виде

$$\sum A_i^{неконс} = E_2 - E_1,$$

где $\sum A_i^{неконс}$ - сумма работ всех неконсервативных сил, действующих на тела механической системы;

$E_1 = T_1 + \Pi_1$ - полная механическая энергия системы в начальный момент времени;

$E_2 = T_2 + \Pi_2$ - полная механическая энергия системы в конечный момент времени.

При этом помните, что скорости всех тел и работы всех сил должны быть записаны относительно одной и той же системы координат (обычно относительно Земли).

3. Распишите работу всех сил и полную механическую энергию тела или системы тел в начальном и конечном положениях.
4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

Прежде всего, выберем механическую систему.

В данной задаче в качестве механической системы выберем **стержень**.

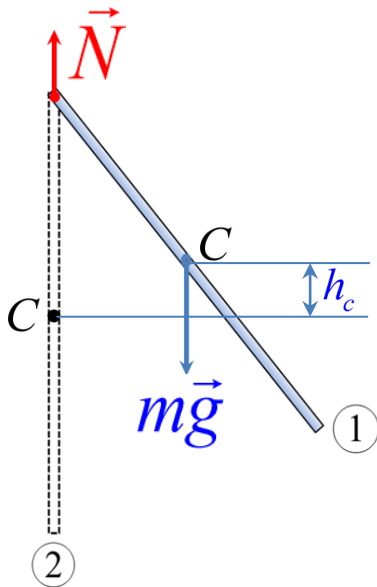


Рис.23.1

Согласно пункту 2 схемы решения задач, проанализируем все силы, действующие на стержень, за время перемещения его из положения 1 в положение 2 (см. рис.23.1).

В качестве инерциальной системы отсчёта, как и в большинстве задач, выберем поверхность Земли.

В этой системе отсчёта на стержень действуют всего две основные силы: сила реакции опоры $\vec{N}$ со стороны оси и сила тяжести $m\vec{g}$.

Силу Архимеда и сопротивление воздуха по условию задачи не учитываем. Силами гравитационного притяжения $F_{грав}$ со стороны

окружающих стержень тел так же пренебрегаем ввиду их чрезвычайной малости по сравнению с остальными силами.

Из двух основных сил $\vec{N}$ и $m\vec{g}$, сила тяжести является консервативной силой, а сила реакции опоры $\vec{N}$ работу не совершает, так как точка её приложения остаётся в течение всего времени движения стержня на месте.

Таким образом, при движении стержня из положения 1 в положение 2 для него будет выполняться закон сохранения полной механической энергии, который применим для решения нашей задачи.

Решение

Итак, запишем закон сохранения полной механической энергии для стержня:

$$E_1 = E_2. \quad (23.1)$$

Распишем уравнение (23.1):

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2, \quad (23.2)$$

где T_1 - кинетическая энергия стержня в положении 1, причём

$$T_1 = \frac{I\omega_1^2}{2} = 0, \text{ так как, по условию задачи, начальная угловая}$$

скорость центра масс стержня в этой точке равна нулю.

$\Pi_1 = mgh_c$ - потенциальная энергия стержня в поле силы тяжести Земли в начальный момент времени,

где m - масса стержня;

h_c - высота центра тяжести стержня в положении 1 относительно его положения в конечный момент времени.

$T_2 = \frac{I\omega_2^2}{2}$ - кинетическая энергия вращательного движения стержня в конечный момент времени (положение 2).

Π_2 - потенциальная энергия стержня в положении 2, причём $\Pi_2 = 0$, так как высота центра тяжести тела в этот момент времени равна нулю.

Обращаем внимание на то, что стержень в условиях данной задачи нельзя рассматривать как материальную точку, поэтому его потенциальная энергия определяется через положение его центра тяжести, а кинетическую энергию стержня определяем по формуле

$T = \frac{I\omega^2}{2}$, так как он находится во вращательном движении.

Таким образом, уравнение (23.2) будет иметь вид

$$0 + mgh_c = \frac{I\omega_2^2}{2} + 0. \quad (23.3)$$

Высоту центра тяжести стержня h_c в положении 1 можно найти из рис.23.2.

Из геометрических соображений имеем

$$h_c = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \alpha = \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha). \quad (23.4)$$

Момент инерции стержня I относительно оси вращения, проходящей через его верхний конец, найдём по теореме Штейнера:

момент инерции твёрдого тела относительно произвольной оси, не проходящей через центр масс тела I , равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной данной оси I_c и произведению массы этого тела m на квадрат расстояния между этими осями d^2 :

$$I = I_c + md^2.$$

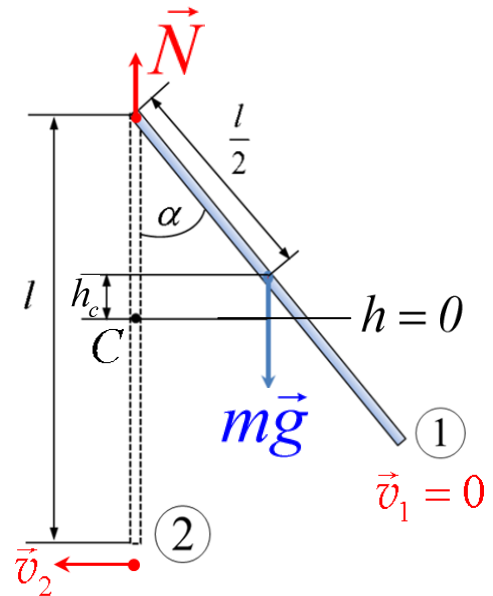


Рис.23.2

Собственный момент инерции стержня I_c равен $I_c = \frac{ml^2}{12}$ (см. таблицу 1 на стр. 120), а расстояние между осью вращения стержня и положением его центра масс равно $d = \frac{l}{2}$ (см. рис.23.2).

Окончательно имеем

$$I = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + m\frac{l^2}{4} = \frac{3ml^2 + ml^2}{12} = \frac{4ml^2}{12} = \frac{ml^2}{3}. \quad (23.5)$$

Подставим уравнения (23.4) и (23.5) в (23.3):

$$mg \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha) = \frac{ml^2}{3} \frac{\omega_2^2}{2}, \Rightarrow, g(1 - \cos \alpha) = \frac{l\omega_2^2}{3} \quad (23.6)$$

Из уравнения (23.6) выразим угловую скорость стержня в точке 2:

$$\omega_2^2 = \frac{3g(1 - \cos \alpha)}{l}. \quad (23.7)$$

Таким образом, для скорости конца стержня в нижней точке получим

$$v_2 = \omega_2 l = l \cdot \sqrt{\frac{3g(1 - \cos \alpha)}{l}} = \sqrt{3gl(1 - \cos \alpha)}. \quad (23.8)$$

Теперь из уравнения (23.8) осталось выразить искомый угол α , на который необходимо отклонить стержень. Имеем

$$v_2^2 = 3gl(1 - \cos \alpha), \Rightarrow, 1 - \cos \alpha = \frac{v_2^2}{3gl}, \Rightarrow, \cos \alpha = 1 - \frac{v_2^2}{3gl},$$

$$\Rightarrow, \alpha = \arccos\left(1 - \frac{v_2^2}{3gl}\right). \quad (23.9)$$

Подставим данные из условия задачи в уравнение (23.9):

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{\left(5\frac{м}{с}\right)^2}{3 \cdot 10\frac{м}{с^2} \cdot 1,7м}\right) = \arccos 0.5 = 30^\circ$$

Ответ: $\alpha = 30^\circ$

Задача 24. Однородный стержень длиной $l = 30$ см, поставленный вертикально, падает на стол. Какую угловую ω и линейную v скорость будет иметь в конце падения верхний его конец? Считать, что трение настолько велико, что нижний конец стержня не проскальзывает по столу.

Ответ: $\omega = 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}}; \quad v = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Дано:
 $l = 0,3 \text{ м}$

$\omega - ?$

$v - ?$

Анализ задачи

Определить угловую ω и линейную v скорость стержня из уравнений кинематики нельзя, так как не известно время падения стержня из начального в конечное положение.

Поэтому для решения задачи применим энергетический метод, в котором это время знать не нужно.

Схема решения задач на законы изменения или сохранения полной механической энергии

1. Сделайте рисунок, на котором укажите начальное и конечное положение тела, а также его скорость в начальном и конечном положениях. Укажите начальный уровень отсчёта потенциальной энергии (обычно он выбирается по самой нижней точке траектории тела или от положения равновесия системы).

2. Проанализируйте все силы, действующие на тела системы за рассматриваемый промежуток времени.

Если за рассматриваемый промежуток времени на тела системы действуют только консервативные силы ($F_{\text{грав}}, F_{\text{тяж}}, F_{\text{упр}}, F_{\text{кулона}}, F_{\text{арх}}$) или все действующие на систему неконсервативные силы не совершают работу за этот промежуток времени, то запишите закон сохранения полной механической энергии для рассматриваемой системы в виде $E_1 = E_2$.

Если за рассматриваемый промежуток времени на тела системы действуют неконсервативные силы, которые совершают работу над телами системы, то запишите закон изменения полной механической энергии в виде

$$\sum A_i^{\text{неконс}} = E_2 - E_1,$$

где $\sum A_i^{\text{неконс}}$ - сумма работ всех неконсервативных сил, действующих на тела механической системы;

$E_1 = T_1 + \Pi_1$ - полная механическая энергия системы в начальный момент времени;

$E_2 = T_2 + \Pi_2$ - полная механическая энергия системы в конечный момент времени.

При этом помните, что скорости всех тел и работы всех сил должны быть записаны относительно одной и той же системы координат (обычно относительно Земли).

3. Распишите работу всех сил и полную механическую энергию тела или системы тел в начальном и конечном положениях.

4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

Решение

Из условия задачи следует, что стержень находится во вращательном движении вокруг оси, проходящей через нижний конец стержня (точка О на рис.24.1).

Особенностью этого движения является тот факт, что все точки тела движутся с одной и той же угловой скоростью ω , которую можно найти из энергетических соображений.

Итак, делаем рисунок, согласно пункту 1 схемы решения задач, (см. рис.24.1).

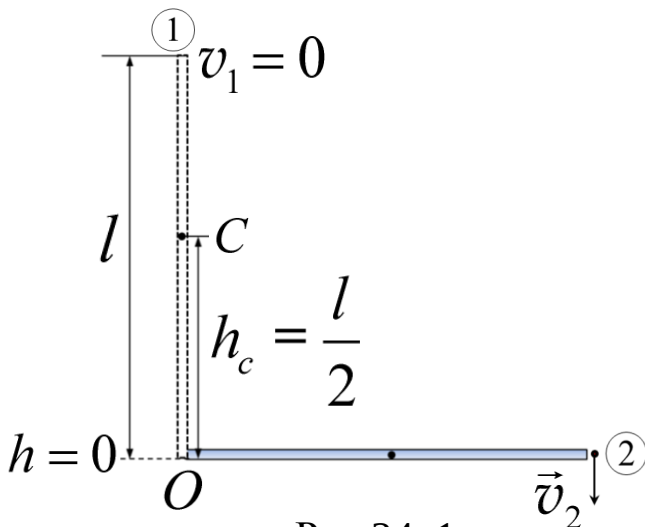


Рис.24. 1

Теперь рассмотрим все силы, действующие на стержень, за всё время его падения.

На него действует постоянная по величине и направлению консервативная сила тяжести $m\vec{g}$ и неконсервативные сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр.пок.}$.

Найдём работу неконсервативных сил за рассматриваемый

промежуток времени.

Напомним, что **механической работой силы** называется скалярная величина, равная произведению силы F на перемещение S точки приложения силы и на косинус угла α между векторами силы и перемещения: $A = FScos\alpha$.

Так как точка приложения силы реакции опоры $\vec{N}$ и силы трения покоя $\vec{F}_{тр.пок}$ (точка O) во время падения стержня, по условию задачи, не перемещается, то работа этих сил равна нулю.

Таким образом, для механической системы «стержень» будет выполняться закон сохранения полной механической энергии:

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2, \quad (24.1)$$

где T_1 - кинетическая энергия стержня в начальный момент времени (положение 1), причём

$$T_1 = \frac{I\omega_1^2}{2} = 0, \text{ так как стержень этот момент покоился;}$$

$$\Pi_1 = mgh_c = mg \frac{l}{2} - \text{потенциальная энергия стержня в положении 1;}$$

$$T_1 = \frac{I\omega_2^2}{2} - \text{кинетическая энергия стержня в конечный момент времени (положение 2);}$$

Π_2 - потенциальная энергия стержня в положении 2, причём $\Pi_2 = 0$, так как высота центра тяжести стержня в этот момент равна нулю.

Обращаем внимание на то, что стержень в условиях данной задачи нельзя рассматривать как материальную точку, поэтому его потенциальная энергия определяется через положение его центра тяжести, а кинетическую энергию стержня определяем по формуле

$$T = \frac{I\omega^2}{2}, \text{ так как он находится во вращательном движении.}$$

$$\text{Тогда уравнение (24.1) примет вид } 0 + mg \frac{l}{2} = \frac{I\omega_2^2}{2} + 0.$$

Отсюда найдём угловую скорость стержня ω_2 в момент падения:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}.$$

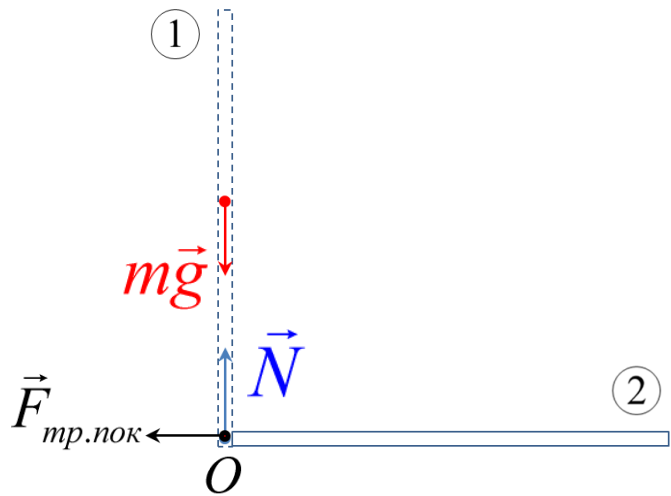


Рис.24. 2

Так как момент инерции однородного стержня относительно оси вращения (точки О) равен $I = \frac{ml^2}{3}$, следовательно,

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{mgl}{\frac{ml^2}{3}}} = \sqrt{\frac{3g}{l}}. \quad (24.2)$$

При вращательном движении все точки тела движутся с одинаковой угловой скоростью, поэтому верхний конец стержня будет иметь такую же угловую скорость:

$$\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{l}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10 \frac{м}{с^2}}{0,3 м}} = 10 \frac{рад}{с}.$$

Тогда линейная скорость верхнего конца стержня равна

$$v = \omega_2 l = 10 \frac{рад}{с} \cdot 0,3 м = 3 \frac{м}{с}.$$

Ответ: $\omega = 10 \frac{рад}{с}$; $v = 3 \frac{м}{с}$

Задача 25. С какой наименьшей высоты h_{min} должно начать скользить тело малых размеров, чтобы по инерции проехать по дорожке, имеющей форму «мертвой петли» радиусом $R=400$ см, и не оторваться от дорожки в верхней точке петли? Трением скольжения и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $h_{min} = 10 м$

Анализ задачи

Дано: $R = 4 м$ $h_{min} - ?$	Определить высоту h_{min} из уравнений кинематики не получится, так как не задана траектория тела и, кроме того, ускорение тела при его перемещении из положения 1 в положение 2 будет меняться не только по величине, но и по направлению. Причём определить вид функции ускорения тела в условиях данной задачи не представляется возможным. Поэтому попробуем применить энергетический метод решения задач, для которого эта информация не существенна. Для этого применим соответствующую схему решения задач.
---	--

Схема решения задач на законы изменения или сохранения полной механической энергии

1. Сделайте рисунок, на котором укажите начальное и конечное положение тела, а также его скорость в начальном и конечном положениях. Укажите начальный уровень отсчёта потенциальной энергии (обычно он выбирается по самой нижней точке траектории тела или от положения равновесия системы).
2. Проанализируйте все силы, действующие на тела системы за рассматриваемый промежуток времени.

Если за рассматриваемый промежуток времени на тела системы действуют только консервативные силы ($F_{грав}$, $F_{тяж}$, $F_{упр}$, $F_{кулона}$, $F_{арх}$) или все действующие на систему неконсервативные силы не совершают работу за рассматриваемый промежуток времени, то запишите закон сохранения полной механической энергии для рассматриваемой системы в виде

$$E_1 = E_2.$$

Если за рассматриваемый промежуток времени на тела системы действуют неконсервативные силы, которые совершают работу над телами системы, то запишите закон изменения полной механической энергии в виде

$$\sum A_i^{неконс} = E_2 - E_1,$$

где $\sum A_i^{неконс}$ - сумма работ всех неконсервативных сил, действующих на тела механической системы;

$E_1 = T_1 + \Pi_1$ - полная механическая энергия системы в начальный момент времени;

$E_2 = T_2 + \Pi_2$ - полная механическая энергия системы в конечный момент времени.

При этом помните, что скорости всех тел и работы всех сил должны быть записаны относительно одной и той же системы координат (обычно относительно Земли).

3. Распишите работу всех сил и полную механическую энергию тела или системы тел в начальном и конечном положениях.
4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

Так как по условию задачи силами трения и сопротивления воздуха пренебрегают, то можно проанализировать возможность применения закона сохранения полной механической энергии для системы «тело».

Для этого необходимо рассмотреть все силы, действующие на нашу механическую систему за время перемещения из начальной точки 1 в конечную точку 2 (см. рис.25.1).

На рис.25.1 изображены основные силы, которые действуют на тело за рассматриваемый промежуток времени.

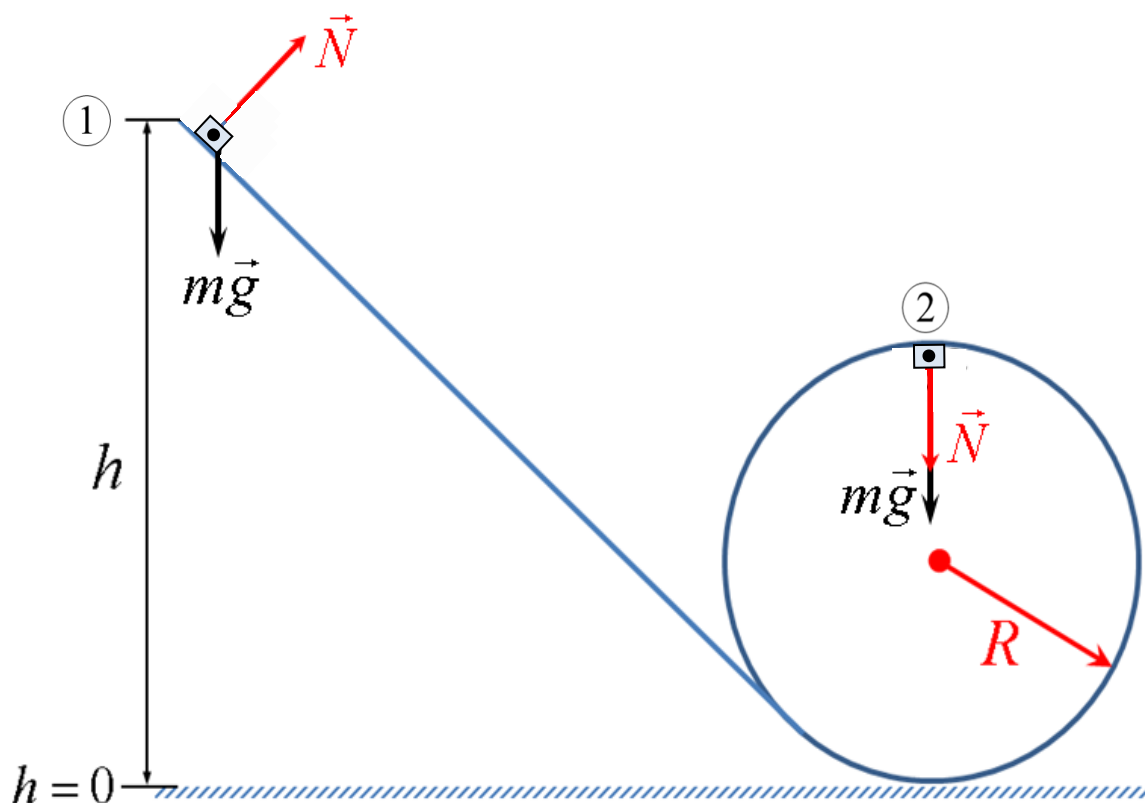


Рис.25.1

Это сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Силами трения скольжения и сопротивления воздуха по условию задачи пренебрегают. Так как, по условию задачи, тело малых размеров, следовательно, его можно рассматривать как материальную точку. В этом случае сила Архимеда тоже будет равна нулю, так как у материальной точки объём стремится к нулю.

Силами гравитации к окружающим тело предметам тоже пренебрегаем в виду их чрезвычайной малости.

Из двух основных сил $\vec{N}$ и $m\vec{g}$, сила тяжести является консервативной силой, а сила реакции опоры $\vec{N}$ работу не совершает, так как она при скольжении тела из положения 1 в положение 2 всегда направлена перпендикулярно его мгновенному перемещению. Докажем это.

Разобьём траекторию движения груза на бесконечно малые участки длиной dr . На таком участке пути силу реакции опоры $\vec{N}$ можно считать постоянной как по величине, так и по направлению.

В этом случае элементарную работу силы реакции опоры на этом участке можно найти по формуле $dA = Ndr\cos\alpha$, где α - угол между векторами силы реакции опоры $\vec{N}$ и вектором элементарного перемещения $d\vec{r}$. Так как на этом участке пути $\alpha = 90^\circ$, тогда $\cos 90^\circ = 0$ и, следовательно, $dA = 0$. Так как механическая работа силы величина аддитивная (то есть работа силы на всём участке пути, равна алгебраической сумме работ на каждом из участков), то работа силы реакции опоры $\vec{N}$ на всём участке пути из положения 1 в положение 2 будет равна нулю.

Таким образом, для нашей механической системы «тело» при движении от точки 1 до точки 2 будет выполняться закон сохранения полной механической энергии, и, следовательно, можно записать, что

$$E_1 = E_2. \quad (25.1)$$

Решение

Распишем уравнение (25.1):

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2, \quad (25.2)$$

где T_1 - кинетическая энергия тела в положении 1, причём

$$T_1 = \frac{mv_1^2}{2} = 0, \text{ так как по условию задачи его начальная скорость в}$$

этот момент равна нулю;

$\Pi_1 = mgh_1$ - потенциальная энергия тела в поле силы тяжести Земли в начальном положении,

где m - масса тела,

h_1 - высота тела в положении 1 относительно поверхности Земли;

$$T_2 = \frac{mv_2^2}{2} - \text{кинетическая энергия тела в конечный момент}$$

времени (положение 2);

$\Pi_2 = mgh_2 = 2mgR$ - потенциальная энергия тела в положении 2,

где $h_2 = 2R$.

Таким образом, уравнение (2) будет иметь вид

$$0 + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 \Rightarrow mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mg2R. \quad (25.3)$$

По условию задачи необходимо определить наименьшую высоту h_{min} , с которой должно начать скольжение тело, чтобы оно смогло пройти верхнюю точку петли и не оторваться в ней от дорожки.

Из анализа уравнения (25.3) следует, что чем выше высота h_1 , тем большую скорость v_2 будет иметь тело в верхней точке петли (так как потенциальная энергия в этой точке $\Pi_2 = 2mgR$ не изменяется). Следовательно, необходимо найти минимальную скорость v_{min} , при которой ещё возможно проехать верхнюю точку петли (то есть подняться на высоту $h_2 = 2R$).

Для этого запишем второй закон Ньютона для тела в верхней точке петли (см.рис.25.2).

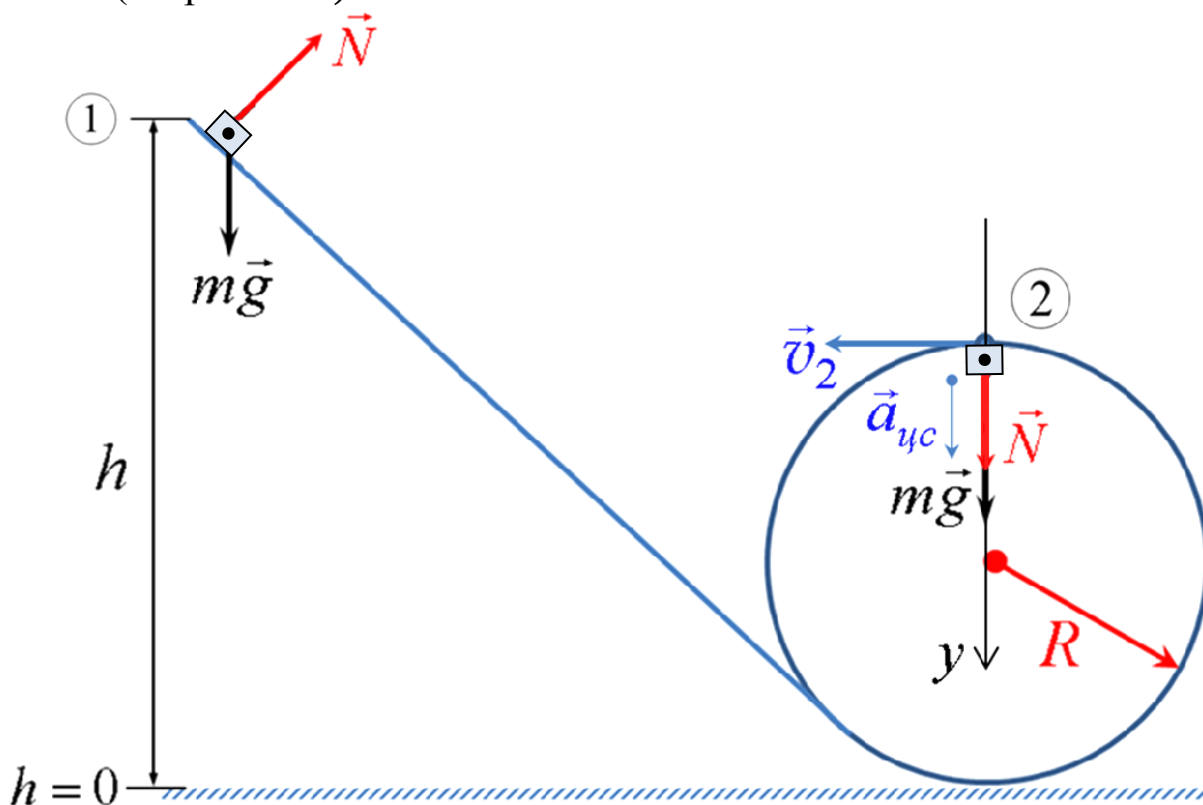


Рис.25.2

Имеем

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{yc}.$$

$$\text{На ОУ: } mg + N = m \frac{v_2^2}{R} \quad (25.4)$$

Выразим из уравнения (25.4) v_2^2 :

$$v_2^2 = \frac{R(mg + N)}{m} \quad (25.5)$$

В уравнении (25.5) величины m , g и R являются по условию задачи константами, а изменяться может только сила реакции опоры N . Причём, чем больше скорость тела v в этой точке, тем больше величина силы реакции опоры N . Таким образом, при минимальной скорости v_{min} прохождения верхней точке петли, величина сила реакции опоры N обратится в ноль, то есть $N = 0$. Тогда уравнение (25.5) примет вид

$$v_{min}^2 = \frac{R\cancel{m}g}{\cancel{m}} = Rg. \quad (25.6)$$

Подставим (25.6) в уравнение (25.3):

$$\begin{aligned} \cancel{m}gh_{min} &= \frac{\cancel{m}v_{min}^2}{2} + \cancel{m}g2R, \Rightarrow, gh_{min} = \frac{v_{min}^2}{2} + 2gR, \Rightarrow, \\ gh_{min} &= \frac{v_{min}^2}{2} + 2gR, \Rightarrow, h_{min} = \frac{R}{2} + 2R, \Rightarrow, h_{min} = \frac{R + 4R}{2}, \Rightarrow, \\ h_{min} &= \frac{5R}{2}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем $h_{min} = \frac{5 \cdot 4m}{2} = 10m.$

Ответ: $h_{min} = 10m.$

Задача 26. Камешек начинает скользить с наивысшей точки купола, имеющего форму полусферы. Дугу какого угла α_1 опишет камешек, прежде чем оторвётся от поверхности купола? Трением пренебречь.

Ответ: $\alpha_1 = 48^\circ$

Дано:

$$v_0 = 0 \frac{m}{c}$$

$\alpha_1 - ?$

Анализ задачи

Указание в условии на факт, что трением при решении задачи можно пренебречь, говорит о том, что это задача на динамику.

Поэтому применим соответствующую схему решения задач.

Схема решения задач по динамике материальной точки или поступательного движения абсолютно твёрдого тела

1. Сделайте чертеж к задаче, на котором нарисуйте тела, рассматриваемые в задаче, все силы, действующие на каждое тело, и укажите направления ускорений этих тел.

2. Если тело движется без ускорения (то есть покоится или движется равномерно и прямолинейно), то запишите для него первый закон Ньютона в виде $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$.

Если тело движется с ускорением, то запишите для него второй закон Ньютона в виде $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = m\vec{a}$.

3. Для каждого тела распишите закон Ньютона в проекциях на оси координат, для чего сначала

для каждого тела выберите удобную систему координат. Начало координат обычно помещают в рассматриваемой материальной точке или в центре тяжести тела, а одну из координатных осей направляют по вектору ускорения этого тела, а затем

для каждого тела распишите своё векторное уравнение в проекциях на оси координат с учётом знаков проекций сил.

4. Решите полученную систему уравнений.

Решение

Итак, делаем рисунок к задаче.

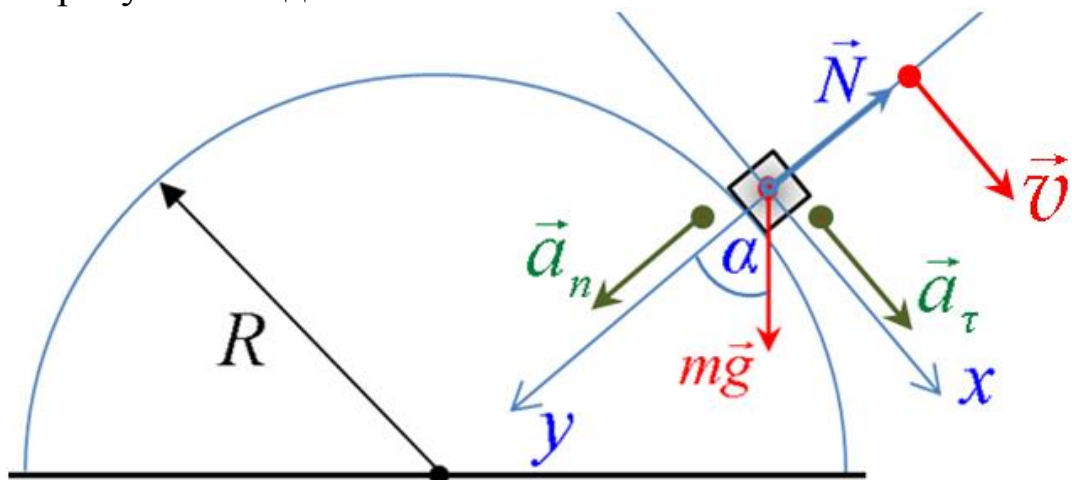


Рис.26.1

Так как тело движется с ускорением, то запишем второй закон Ньютона для камешка в произвольный момент времени, когда он ещё скользит по поверхности сферы:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}. \quad (26.1)$$

Выберем систему координат. Начало системы поместим в центре масс камешка, ось ОУ направим по направлению нормального (центростремительного) ускорения $\vec{a}_n$ (то есть к центру сферы), а ось ОХ - перпендикулярно ей.

Распишем уравнение (1) на оси координат:

$$\text{на ОХ:} \quad mg \sin \alpha = ma_\tau \quad (26.2)$$

$$\text{на ОУ:} \quad mg \cos \alpha - N = m \frac{v^2}{R} \quad (26.3)$$

По условию задачи необходимо найти угол α_1 , при котором камешек оторвётся от поверхности сферы.

Найти этот угол α_1 можно из уравнения (26.3) из того условия, что в момент отрыва сила реакции опоры N становится равной нулю.

Тогда в этот момент времени уравнение (26.3) примет вид

$$mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{R},$$

$$\text{Отсюда} \quad g \cos \alpha = \frac{v^2}{R}. \quad (26.4)$$

В уравнении (26.4) неизвестна скорость камешка v в этот момент. Её можно найти из энергетических соображений. Для этого применим необходимую схему решения задач.

Схема решения задач на законы изменения или сохранения полной механической энергии

1. Сделайте рисунок, на котором укажите начальное и конечное положение тела, а также его скорость в начальном и конечном положениях. Укажите начальный уровень отсчёта потенциальной энергии (обычно он выбирается по самой нижней точке траектории тела или от положения равновесия системы).

2. Проанализируйте все силы, действующие на тела системы за рассматриваемый промежуток времени.

Если за рассматриваемый промежуток времени на тела системы действуют только консервативные силы ($F_{\text{грав}}$, $F_{\text{тяж}}$, $F_{\text{упр}}$, $F_{\text{кулона}}$, $F_{\text{арх}}$) или все действующие на систему неконсервативные силы не совершают работу за этот промежуток времени, то запишите закон сохранения полной механической энергии для рассматриваемой системы в виде

$$E_1 = E_2.$$

Если за рассматриваемый промежуток времени на тела системы действуют неконсервативные силы, которые совершают работу над телами системы, то запишите закон изменения полной механической энергии в виде

$$\sum A_1^{\text{неконс}} = E_2 - E_1,$$

где $\sum A_1^{\text{неконс}}$ - сумма работ всех неконсервативных сил, действующих на тела механической системы;

$E_1 = T_1 + \Pi_1$ - полная механическая энергия системы в начальный момент времени;

$E_2 = T_2 + \Pi_2$ - полная механическая энергия системы в конечный момент времени.

При этом помните, что скорости всех тел и работы всех сил должны быть записаны относительно одной и той же системы координат (обычно относительно Земли).

3. Распишите работу всех сил и полную механическую энергию тела или системы тел в начальном и конечном положениях.

4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

Итак,

- делаем рисунок для начального (положение 1) и конечного (положение 2) момента времени;

- выбираем начальный уровень отсчёта потенциальной энергии (в точке отрыва от полусферы);

- указываем скорости тела в точках 1 и 2;

Проанализируем силы, которые действуют на камешек за время его скольжения по поверхности сферы от точки 1 до точки 2.

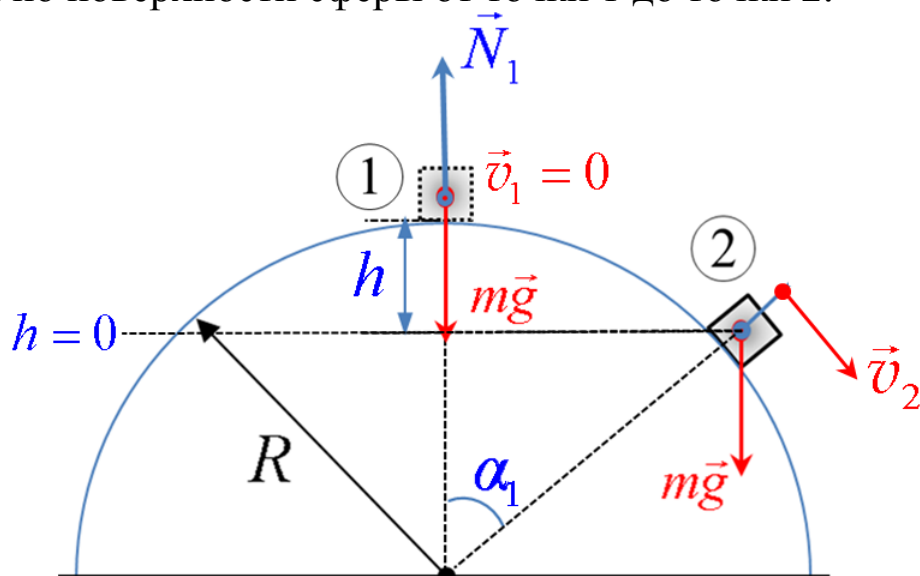


Рис.26.2

По условию задачи, камешек не имеет электрического заряда, не намагничен и по нему не протекает электрический ток. Поэтому электрическое, магнитное и электромагнитное поля на него действовать не будут. Однако камешек обладает массой, поэтому на него будет действовать сила тяжести.

Со стороны полусферы на камешек действует неконсервативная сила реакции опоры $\vec{N}$.

Так как, камешек малых размеров, следовательно, его можно рассматривать как материальную точку. В этом случае сила Архимеда будет равна нулю, так как у материальной точки объём стремится к нулю. Силой трения по условию задачи пренебрегаем. Силами гравитации к окружающим камешек предметам тоже пренебрегаем в виду их чрезвычайной малости.

Таким образом, при перемещении камешка из положения 1 в положение 2 на него будет действовать только одна неконсервативная сила – сила реакции опоры $\vec{N}$.

Определим её работу за время движения камешка из положения 1 в положение 2.

Формулу $A_N = NS \cos \alpha$ применять в нашем случае нельзя, так как сила реакции опоры при перемещении тела их точки 1 в точку 2 меняет не только величину, но и направление. Поэтому найдём сначала работу этой силы на бесконечно малом участке перемещения dr :

$$dA = Ndr \cos \alpha.$$

Так как на любом таком участке перемещения камешка dr угол между вектором силы реакции опоры $\vec{N}$ и вектором элементарного перемещения $d\vec{r}$ всегда равен 90 градусов (то есть $\alpha = 90^\circ$), то $\cos 90^\circ = 0$ и, следовательно, на любом участке dr работа силы реакции опоры равна нулю (то есть $dA_N = Ndr \cos 90^\circ = 0$).

Так как механическая работа силы величина аддитивная (то есть работа на всём участке пути равна сумме работ на каждом из участков), то суммарная работа силы реакции опоры $\vec{N}$ при перемещении камешка из точки 1 в точку 2 равна нулю.

Таким образом, для камешка, в течение всего времени его перемещения из положения 1 в положение 2, будет выполняться закон сохранения полной механической энергии и можно записать

$$E_1 = E_2,$$

где $E_1 = T_1 + \Pi_1 = 0 + mgh$ - полная механическая энергия камешка в точке 1;

$$E_2 = T_2 + \Pi_2 = \frac{mv_2^2}{2} + 0 - \text{полная механическая энергия камешка в точке 2.}$$

Тогда можно записать $mgh = \frac{mv_2^2}{2}.$

Отсюда найдём скорость камешка в точке 2:

$$v_2^2 = 2gh. \quad (26.5)$$

Высоту h найдём из геометрических соображений по рисунку 2:

$$h = R - R \cos \alpha_1 = R(1 - \cos \alpha_1). \quad (26.6)$$

Подставив (26.6) в (26.5), получим

$$v_2^2 = 2gR(1 - \cos \alpha_1). \quad (26.7)$$

Подставим (26.7) в (26.4), получим $g \cos \alpha_1 = \frac{2gR(1 - \cos \alpha_1)}{R}.$

Отсюда следует, что

$$\cos \alpha_1 = 2(1 - \cos \alpha_1) \Rightarrow \cos \alpha_1 = 2 - 2 \cos \alpha_1 \Rightarrow 3 \cos \alpha_1 = 2,$$

Окончательно имеем $\alpha_1 = \arccos \frac{2}{3} = 48^\circ.$ **Ответ:** $\alpha_1 = 48^\circ$

Задача 27. Маховик в виде диска массой $m = 50$ кг и радиусом 20 см был раскручен до частоты вращения $n_1 = 480$ мин⁻¹ и затем предоставлен самому себе. Вследствие трения маховик остановился. Определите момент силы трения $M_{тр}$, действующий на маховик, считая его постоянным, если маховик остановился через $\Delta t = 50$ с.

Ответ: $M_{тр} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}$

Дано:

$$m = 50 \text{ кг}$$

$$R = 0,2 \text{ м}$$

$$n_1 = 8 \frac{\text{об}}{\text{с}}$$

$$\Delta t = 50 \text{ с}$$

$$\omega_2 = 0 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

$$M_{тр} - ?$$

Анализ задачи

Решим задачу двумя способами.

Способ 1

Для решения задачи применим основное уравнение динамики вращательного движения абсолютно твёрдого тела:

в инерциальной системе отчёта алгебраическая сумма моментов всех внешних сил $\sum M_{zi}^{\text{внеш}}$, действующих на тело относительно неподвижной оси

вращения Z , равна произведению момента инерции этого тела относительно этой оси I_z , на сообщённое ему угловое ускорение ε :

$$\sum M_{zi}^{внеш} = I_z \varepsilon. \quad (27.1)$$

В качестве инерциальной системы отсчёта выберем поверхность Земли.

Из условия задачи следует, что маховик находился во вращательном движении и остановился только в результате действия сил трения.

Следовательно, алгебраическая сумма моментов всех остальных внешних сил, действующих на маховик относительно оси вращения Z , была равна нулю и их можно не анализировать.

Решение

Запишем уравнение (27.1) относительно оси вращения маховика Z :

$$-M_{тр} = -I \varepsilon, \quad (27.2)$$

где $I = \frac{mR^2}{2}$ - момент инерции маховика

(диска) относительно его оси вращения;

$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t}$ - угловое ускорение

маховика относительно оси вращения.

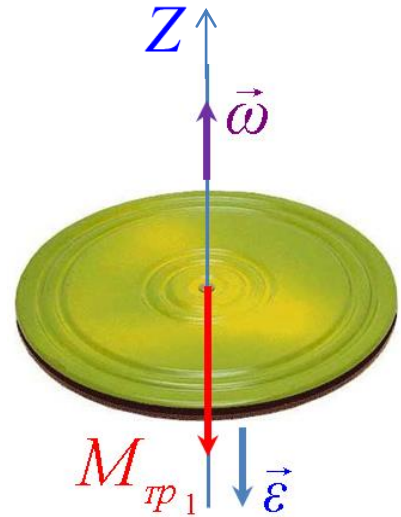
Так как маховик через промежуток времени Δt остановился, то его конечная угловая скорость равна нулю, то есть $\omega_2 = 0 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.

С учётом того, что $\omega_1 = 2\pi n_1$, уравнение (2) примет вид

$$M_{тр} = \frac{mR^2}{2} \frac{2\pi n_1}{\Delta t} = \frac{mR^2 \pi n_1}{\Delta t}. \quad (27.3)$$

Проверим размерность уравнения (27.3).

$$[M_{тр}] = [H \cdot m] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} \right] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \frac{1}{\text{с}}}{\text{с}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}.$$



Теперь, подставив данные из условия задачи, получим

$$M_{\text{тп}_1} = \frac{50 \text{ кг} \cdot (0,2 \text{ м})^2 \cdot 3,14 \cdot 8 \frac{\text{об}}{\text{с}}}{50 \text{ с}} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Способ 2

Для решения задачи применим закон изменения момента импульса для механической системы «маховик».

Схема решения задач на законы изменения или сохранения момента импульса

1. Сделайте два рисунка, на которых изобразите ситуацию, рассматриваемую в задаче непосредственно перед взаимодействием и сразу после взаимодействия. Здесь же укажите направления векторов линейных и угловых скоростей или моментов импульсов всех тел системы.

2. Проанализируйте моменты всех внешних сил, действующих на тела системы в течение всего времени взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени моменты всех внешних сил относительно оси вращения Z не скомпенсированы, то запишите закон изменения момента импульса относительно этой оси Z в виде

$$\left(\sum M_{iz}^{\text{внешних}} \right) t = L_{2z} - L_{1z},$$

где $\sum M_{iz}^{\text{внешних}}$ - сумма моментов всех внешних сил, действующих на тела системы, относительно оси вращения Z ;

t - время действия внешних сил;

$L_{1z} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{перед}}$ - момент импульса системы непосредственно перед взаимодействием;

$L_{2z} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{после}}$ - момент импульса системы сразу после взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени моменты всех внешних сил относительно оси вращения Z скомпенсированы или взаимодействие происходит очень кратковременно (удар, разрыв снаряда, выстрел), то запишите закон сохранения момента импульса относительно выбранной оси для рассматриваемой системы в виде

$$\left(\sum L_{iz} \right)_{\text{перед}} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{после}}.$$

Если за рассматриваемый промежуток времени проекции моментов всех внешних сил, действующих на систему, на какую - либо ось Z в пространстве равны нулю, то запишите закон сохранения проекции момента импульса на направление этой оси:

$$\left(\sum L_{iz}\right)_{\text{перед}} = \left(\sum L_{iz}\right)_{\text{после}},$$

где $\left(\sum L_{iz}\right)_{\text{перед}}$ - сумма проекций моментов импульсов тел системы на ось Z непосредственно перед взаимодействием;

$\left(\sum L_{iz}\right)_{\text{после}}$ - сумма проекций моментов импульсов тел системы на ось Z сразу после взаимодействия.

При этом помните, что моменты всех сил и моменты импульсов всех тел системы должны быть записаны относительно одной и той же оси Z .

4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

Из условия задачи следует, что момент импульса нашей системы изменялся, так как первоначально вращающийся маховик остановился, причём это произошло только благодаря действию сил трения.

Запишем закон изменения момента импульса для системы «маховик» относительно его оси вращения Z :

$$-M_{mp_z} \Delta t = L_{2z} - L_{1z}. \quad (27.4)$$

Так как

$$L_{2z} = I\omega_2 = 0 \text{ (маховик остановился, } \omega_2 = 0),$$

$$L_{1z} = I\omega_1 = \frac{mR^2}{2} \cdot 2\pi n_1, \text{ то уравнение (4) примет вид}$$

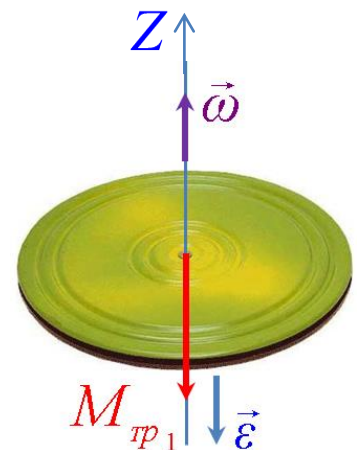
$$-M_{mp_z} \Delta t = 0 - \frac{mR^2}{2} \cdot 2\pi n_1,$$

Откуда получим, что
$$M_{mp_z} = \frac{mR^2 \pi n_1}{\Delta t}$$

и
$$M_{tp_1} = \frac{50 \text{ кг} \cdot (0,2 \text{ м})^2}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 8 \frac{\text{об}}{\text{с}}}{50 \text{ с}} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, мы получили тот же результат.

Ответ: $M_{tp} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$



Задача 28. Платформа в виде диска радиусом $R = 150 \text{ см}$ и массой $M = 180 \text{ кг}$ вращается по инерции около вертикальной оси с частотой $n_1 = 10 \frac{1}{\text{мин}}$. В центре платформы стоит человек массой $m = 60 \text{ кг}$. Какую линейную скорость относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы? Момент инерции для человека рассчитать как для материальной точки.

Ответ: $v_2 = 0,94 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Дано:

$$M = 180 \text{ кг}$$

$$m = 60 \text{ кг}$$

$$n_1 = \frac{1}{6} \frac{\text{об}}{\text{с}}$$

$$R = 150 \text{ см}$$

$$v_2 = ?$$

Анализ задачи

Решить эту задачу, используя уравнения кинематики, нельзя, так как неизвестно время перехода человека из центра платформы на её край.

Поэтому применим для решения задачи соответствующие законы сохранения или изменения. Рассмотрим механическую систему «платформа + человек».

Так как система вращается вокруг вертикальной оси (а не движется поступательно), то для решения задачи можно применить лишь законы изменения или сохранения момента импульса. Используем для этого соответствующую схему решения задач.

Схема решения задач на законы изменения или сохранения момента импульса

1. Сделайте два рисунка, на которых изобразите ситуацию, рассматриваемую в задаче непосредственно перед взаимодействием и сразу после взаимодействия. Здесь же укажите направления векторов линейных и угловых скоростей или моментов импульсов всех тел системы.

2. Проанализируйте моменты всех внешних сил, действующих на тела системы в течение всего времени взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени моменты всех внешних сил относительно оси вращения Z не скомпенсированы, то запишите закон изменения момента импульса относительно этой оси

$$Z \text{ в виде } \left(\sum M_{iz}^{\text{внешних}} \right) t = L_{2z} - L_{1z},$$

где $\sum M_{iz}^{\text{внешних}}$ - сумма моментов всех внешних сил, действующих на тела системы, относительно оси вращения Z ;

t - время действия внешних сил;

$L_{1z} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{перед}}$ - момент импульса системы непосредственно перед взаимодействием;

$L_{2z} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{после}}$ - момент импульса системы сразу после взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени моменты всех внешних сил относительно оси вращения Z скомпенсированы или взаимодействие происходит очень кратковременно (удар, разрыв снаряда, выстрел), то запишите закон сохранения момента импульса относительно выбранной оси для рассматриваемой системы в виде

$$\left(\sum L_{iz} \right)_{\text{перед}} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{после}}.$$

Если за рассматриваемый промежуток времени проекции моментов всех внешних сил, действующих на систему, на какую - либо ось Z в пространстве равны нулю, то запишите закон сохранения проекции момента импульса на направление этой оси:

$$\left(\sum L_{iz} \right)_{\text{перед}} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{после}},$$

где $\left(\sum L_{iz} \right)_{\text{перед}}$ - сумма проекций моментов импульсов тел системы на ось Z непосредственно перед взаимодействием;

$\left(\sum L_{iz} \right)_{\text{после}}$ - сумма проекций моментов импульсов тел системы на ось Z сразу после взаимодействия.

При этом помните, что моменты всех сил и моменты импульсов всех тел системы должны быть записаны относительно одной и той же оси.

4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

Сделаем рисунки для начального и конечного момента времени согласно условию задачи (см. рис.28.1).

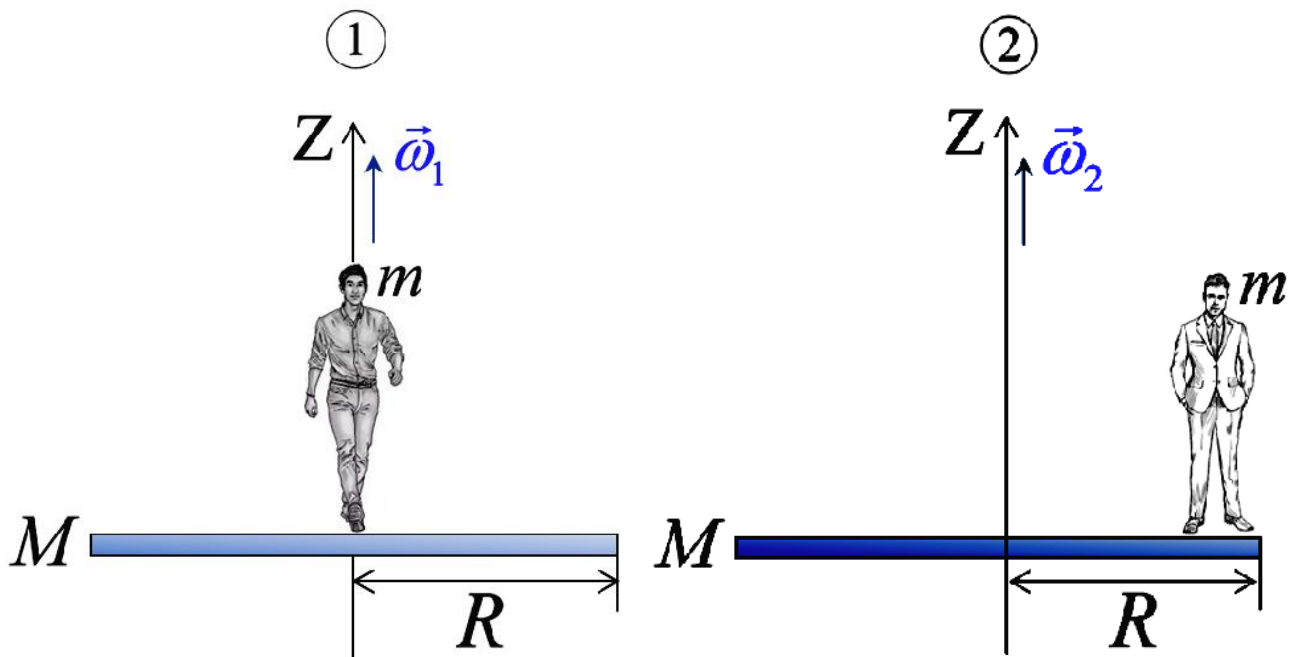


Рис.28.1

По условию задачи, платформа с человеком вращается по инерции. Это означает, что моменты всех внешних сил, действующих на нашу механическую систему, в начальный момент времени скомпенсированы.

При переходе человека на край платформы, моменты всех внешних сил остаются скомпенсированными, так как момент силы тяжести, действующей на человека, относительно вертикальной оси вращения платформы остаётся равным нулю на протяжении всего времени перехода человека на край платформы. Никаких дополнительных моментов сил, которые реально могут возникнуть в результате деформации платформы, по условию нашей задачи не возникают, так как платформа рассматривается как абсолютно твёрдое тело, которое, по определению, не испытывает деформаций.

Таким образом, для системы «платформа + человек» за весь рассматриваемый промежуток времени будет выполняться закон сохранения момента импульса относительно вертикальной оси вращения платформы Z:

$$\left(\sum L_{iz}\right)_{до} = \left(\sum L_{iz}\right)_{после}.$$

Решение

Запишем закон сохранения момента импульса для нашей механической системы:

$$L_{n1} + L_{q1} = L_{n2} + L_{q2}, \quad (28.1)$$

где $L_{n1} = I_{n1}\omega_1$ - момент импульса платформы в начальный момент времени;

$L_{ч2} = I_{ч1}\omega_1$ - момент импульса человека в начальный момент времени;

$L_{n2} = I_{n2}\omega_2$ - момент импульса платформы в конечный момент времени;

$L_{ч2} = I_{ч2}\omega_2$ - момент импульса человека в конечный момент времени.

Тогда уравнение (28.1) примет вид

$$I_{n1}\omega_1 + I_{ч1}\omega_1 = I_{n2}\omega_2 + I_{ч2}\omega_2, \quad (28.2)$$

где $I_{n1} = I_{n2} = \frac{MR^2}{2}$ - момент инерции платформы в начальный и конечный момент времени. Его рассчитываем как для однородного диска (см. таблицу 1 на стр. 120);

$I_{ч1} = 0$ - момент инерции человека, стоящего в центре платформы.

Его рассчитываем как для материальной точки $I = mr^2$, причём момент инерции равен нулю, так как человек стоит в центре диска и, следовательно, $r_1 = 0$ м;

$\omega_1 = 2\pi n_1$ - угловая скорость платформы с человеком в начальный момент времени;

$I_{ч2} = mR^2$ - момент инерции человека, стоящего на краю платформы;

ω_2 - угловая скорость платформы с человеком в конечный момент времени.

Линейная скорость человека, стоящего на краю платформы, связана с угловой скоростью соотношением

$$v_2 = \omega_2 R. \quad (28.3)$$

Выразим ω_2 из уравнения (28.2):

$$\omega_2 = \frac{I_{n1} + I_{ч1}}{I_{n1} + I_{ч2}} \omega_1. \quad (28.4)$$

Подставим (28.4) в (28.3), получим

$$v_2 = \frac{I_{n1} + I_{ч1}}{I_{n1} + I_{ч2}} \omega_1 R. \quad (28.5)$$

Расписав все величины в уравнении (28.5), получим линейную скорость человека, стоящего на краю платформы:

$$v_2 = \frac{\frac{MR^2}{2} + 0}{\frac{MR^2}{2} + mR^2} \cdot 2\pi n_1 R = \frac{M}{M + 2m} \cdot 2\pi n_1 R. \quad (28.6)$$

Проверим размерность уравнения (28.6).

$$\left[\frac{M}{c} \right] = \frac{кг}{кг + кг} \cdot \frac{1}{с} \cdot M = \frac{кг}{кг} \cdot \frac{M}{с} = \frac{M}{с}.$$

Размерность совпала, поэтому подставим в уравнение (28.6) данные из условия задачи величины. Окончательно получим

$$v_2 = \frac{180 кг}{180 кг + 2 \cdot 60 кг} \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot \frac{1}{6} \frac{об}{с} \cdot 1,5 м = 0,94 \frac{м}{с}.$$

Ответ: $v_2 = 0,94 \frac{м}{с}$.

Задача 29. Стержень длиной $l = 150$ см и массой $M = 10$ кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В середину стержня ударяет пуля массой $m = 10$ г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью $v_0 = 500 \frac{м}{с}$, и застревает в стержне. На какой угол α отклонится стержень после удара? Трением в оси стержня пренебечь.

Ответ: $\alpha \approx 9^\circ$

Анализ задачи

Дано: $M = 10 кг$ $m = 10 \cdot 10^{-3} кг$ $v_0 = 500 \frac{м}{с}$ $l = 1,5 м$ $\alpha - ?$	Рассмотрим механическую систему «пуля + стержень». Так как пуля по условию задачи застряла в стержне, следовательно, после удара и пуля, и соответствующая точка стержня будут двигаться с одинаковой скоростью $\vec{v}$. Это означает, что произошёл абсолютно неупругий удар. При таком ударе выполняется закон сохранения момента импульса механической системы. Пуля, ударившись о стержень, за ничтожно малый промежуток времени приводит его в движение с угловой скоростью ω_1 и вся система приобретает кинетическую энергию
---	--

$T = \frac{I\omega_1^2}{2}$, которая в конечном итоге преобразуется в потенциальную

энергию системы в её крайнем положении $\Pi_2 = (M + m)gh_c$, то есть происходит преобразование механической энергии системы.

Поэтому, для ответа на поставленный вопрос применим соответствующие схемы решения задач.

Схема решения задач на законы изменения или сохранения полной механической энергии

1. Сделайте рисунок, на котором укажите начальное и конечное положение тела, а также его скорость в начальном и конечном положениях. Укажите начальный уровень отсчёта потенциальной энергии (обычно он выбирается по самой нижней точке траектории тела или от положения равновесия системы).

2. Проанализируйте все силы, действующие на тела системы за рассматриваемый промежуток времени.

Если за рассматриваемый промежуток времени на тела системы действуют только консервативные силы ($F_{грав}$, $F_{тяж}$, $F_{упр}$, $F_{кулона}$, $F_{арх}$) или все действующие на систему неконсервативные силы не совершают работу за этот промежуток времени, то запишите закон сохранения полной механической энергии для рассматриваемой системы в виде

$$E_1 = E_2.$$

Если за рассматриваемый промежуток времени на тела системы действуют неконсервативные силы, которые совершают работу над телами системы, то запишите закон изменения полной механической энергии в виде

$$\sum A_i^{неконс} = E_2 - E_1,$$

где $\sum A_i^{неконс}$ - сумма работ всех неконсервативных сил, действующих на тела механической системы;

$E_1 = T_1 + \Pi_1$ - полная механическая энергия системы в начальный момент времени;

$E_2 = T_2 + \Pi_2$ - полная механическая энергия системы в конечный момент времени.

3. Распишите работу всех сил и полную механическую энергию тела или системы тел в начальном и конечном положениях.

4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

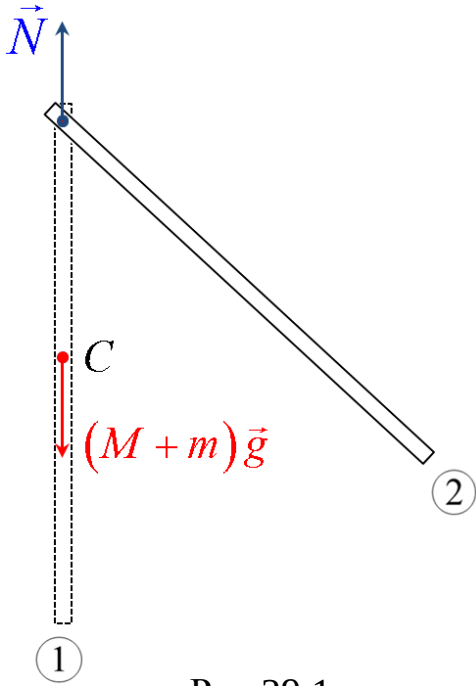
Решение

Рис.29.1

Сделаем рисунок по условию задачи и проанализируем силы, действующие на нашу механическую систему за время перехода из положения 1 в положение 2 (см. рис.29.1).

На систему действует консервативная сила тяжести $(M + m)\vec{g}$ и неконсервативная сила реакции опоры $\vec{N}$ со стороны оси вращения стержня.

Сил трения в оси вращения стержня по условию задачи нет.

Так как среда, в которой движется стержень, не указана, то предполагается, что всё происходит в вакууме,

следовательно, силой Архимеда и сопротивлением воздуха тоже пренебрегаем.

Так же не учитываем силы гравитационного притяжения к окружающим стержень телам ввиду их чрезвычайной малости.

Действующая на систему неконсервативная сила реакции опоры $\vec{N}$, при переходе стержня из положения 1 в положение 2 работу не совершает, так как точка её приложения не перемещается в пространстве.

Из этого анализа задачи следует, что для системы «пуля + стержень», за рассматриваемый промежуток времени будет выполняться закон сохранения полной механической энергии.

Таким образом, можно записать, что

$$E_1 = E_2, \quad (29.1)$$

где $E_1 = T_1 + \Pi_1$ - полная механическая энергия системы в начальный момент времени (в положении 1);

$E_2 = T_2 + \Pi_2$ - полная механическая энергия системы в конечный момент времени (в положении 2);

$T_1 = \frac{I\omega_1^2}{2}$ - кинетическая энергия системы в положении 1,

причём $I = I_c + I_{\pi} = \frac{M l^2}{3} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2$ - момент инерции системы

(стержня I_c и пули I_{π}) относительно оси вращения стержня (стержень рассматриваем как тонкий и однородный цилиндр, а пулю как материальную точку);

$\omega_1 = \frac{v_{c1}}{l} = \frac{2v_{c1}}{l}$ - угловая скорость вращения стержня в положении 1

сразу после попадания в него пули;

v_{c1} - скорость движения центра масс системы в положении 1, которую необходимо будет найти;

$\Pi_1 = (M + m) g h_{c1} = 0$ - потенциальная энергия системы в положении 1.

($\Pi_1 = 0$, так как высота центра масс системы в начальный момент времени была равна нулю, то есть $h_{c1} = 0$ (см. рис.29.2));

$T_2 = \frac{I \omega_2^2}{2} = 0$ - кинетическая энергия

системы в положении 2,

($T_2 = 0$, так как в положении 2 $\omega_2 = 0$);

$h_c = \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha)$ - высота подъёма

центра масс системы в положении 2

(см. рис.29.2).

Таким образом, уравнение (29.1) будет иметь вид

$$\frac{I \omega_1^2}{2} + 0 = 0 + (M + m) g h_{c2}.$$

После подстановки всех величин получим

$$\frac{\left(\frac{M l^2}{3} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \right) \left(\frac{2v_{c1}}{l} \right)^2}{2} = (M + m) g \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha), \Rightarrow,$$

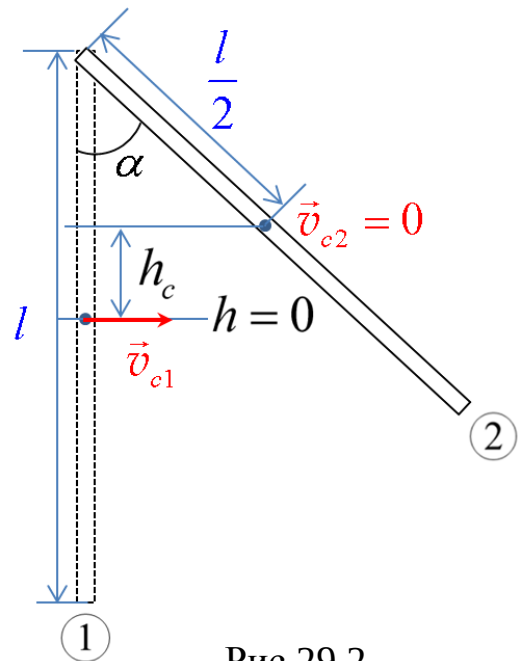


Рис.29.2

$$\frac{\left(\frac{M l^2}{3} + m \left(\frac{l}{2}\right)^2\right) 4v_{c1}^2}{l^2} = (M + m) g \frac{l}{2} (1 - \cos \alpha), \Rightarrow,$$

$$\frac{\left(\frac{M l^2}{3} + m \left(\frac{l}{2}\right)^2\right) 4v_{c1}^2}{l^2} = (M + m) g l (1 - \cos \alpha). \quad (29.2).$$

Уравнение (29.2) можно несколько упростить.

Так как по условию задачи масса стержня во много раз больше массы пули (то есть $M \gg m$), то массой самой пули m и её моментом инерции $I_{\pi} = m \left(\frac{l}{2}\right)^2$ можно пренебречь.

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{\frac{M l^2}{3} 4v_{c1}^2}{l^2} = M g l (1 - \cos \alpha),$$

$$\Rightarrow, \quad \frac{4v_{c1}^2}{3} = g l (1 - \cos \alpha). \quad (29.3)$$

Скорость центра масс системы v_{c1} в положении 1 найдём по закону сохранения момента импульса для нашей механической системы «стержень + пуля». Для этого применим соответствующую схему решения задач.

Схема решения задач на законы изменения или сохранения момента импульса

1. Сделайте два рисунка, на которых изобразите ситуацию, рассматриваемую в задаче непосредственно перед взаимодействием и сразу после взаимодействия. Здесь же укажите направления векторов линейных и угловых скоростей или моментов импульсов всех тел системы.

2. Проанализируйте моменты всех внешних сил, действующих на тела системы в течение всего времени взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени моменты всех внешних сил относительно оси вращения Z не скомпенсированы, то запишите закон изменения момента импульса относительно этой оси Z в виде

$$\left(\sum M_{iz}^{\text{внешних}}\right) t = L_{2z} - L_{1z},$$

где $\sum M_{iz}^{\text{внешних}}$ - сумма моментов всех внешних сил, действующих на тела системы, относительно оси вращения Z ;

t - время действия внешних сил;

$L_{1z} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{перед}}$ - момент импульса системы непосредственно перед взаимодействием;

$L_{2z} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{после}}$ - момент импульса системы сразу после взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени моменты всех внешних сил относительно оси вращения Z скомпенсированы или взаимодействие происходит очень кратковременно (удар, разрыв снаряда, выстрел), то запишите закон сохранения момента импульса относительно выбранной оси для рассматриваемой системы в виде

$$\left(\sum L_{iz} \right)_{\text{перед}} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{после}}.$$

Если за рассматриваемый промежуток времени проекции моментов всех внешних сил, действующих на систему, на какую - либо ось Z в пространстве равны нулю, то запишите закон сохранения проекции момента импульса на направление этой оси:

$$\left(\sum L_{iz} \right)_{\text{перед}} = \left(\sum L_{iz} \right)_{\text{после}},$$

где $\left(\sum L_{iz} \right)_{\text{перед}}$ - сумма проекций моментов импульсов тел системы на ось Z непосредственно перед взаимодействием;

$\left(\sum L_{iz} \right)_{\text{после}}$ - сумма проекций моментов импульсов тел системы на ось Z сразу после взаимодействия.

При этом помните, что моменты всех сил и моменты импульсов всех тел системы должны быть записаны относительно одной и той же оси Z .

4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

Итак, делаем рисунки для моментов времени непосредственно перед попаданием пули в стержень и сразу после него (см. рис.29.3).

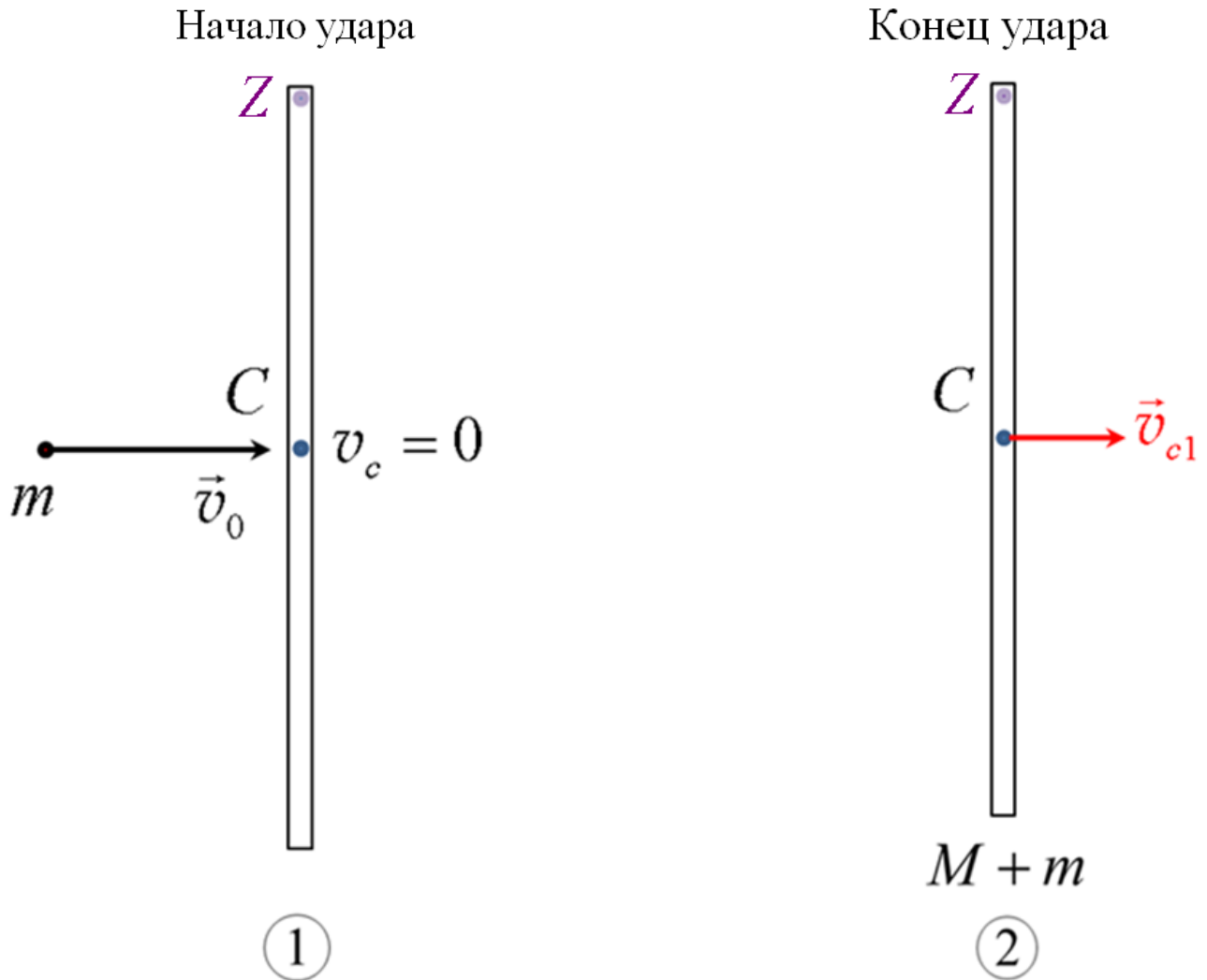


Рис.29.3

Запишем закон сохранения момента импульса для нашей системы относительно оси вращения стержня Z при абсолютно неупругом ударе:

$$L_{\Pi 1} + L_{c1} = L_{\Pi 2} + L_{c2}, \quad (29.4)$$

где $L_{\Pi 1} = mv_0 \frac{l}{2}$ - момент импульса пули перед ударом;

$L_{c1} = I_c \omega_0 = 0$ - момент импульса стержня перед ударом.

($L_{c1} = 0$, так как стержень перед ударом покоился ($\omega_0 = 0$));

$L_{c2} = I_{c2} \omega_1 = \frac{M l^2}{3} \omega_1$ - момент импульса стержня сразу после удара;

$L_{\Pi 2} = I_{\Pi 2} \omega_1 = m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \omega_1 = \frac{ml^2}{4} \omega_1$ - момент импульса пули сразу после удара;

$\omega_1 = \frac{v_{c1}}{\frac{l}{2}} = \frac{2v_{c1}}{l}$ - угловая скорость вращения стержня в точке 1 сразу

после попадания в него пули.

Тогда уравнение (29.4) можно записать так

$$mv_0 \frac{l}{2} + 0 = \frac{M l^2}{3} \cdot \frac{2v_{c1}}{l} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 \cdot \frac{2v_{c1}}{l}. \quad (29.5)$$

Так как $M \gg m$, то можно записать, что

$$mv_0 \frac{l}{2} = \frac{M l^2}{3} \frac{2v_{c1}}{l}, \Rightarrow, \frac{3mv_0}{4} = M v_{c1}, \Rightarrow, \\ v_{c1} = \frac{3mv_0}{4M}. \quad (29.6)$$

Подставим (29.6) в (29.3):

$$\frac{4 \left(\frac{3mv_0}{4M} \right)^2}{3} = gl(1 - \cos \alpha), \Rightarrow, \frac{4 \frac{9}{16} \frac{m^2}{M^2} v_0^2}{3} = gl(1 - \cos \alpha), \Rightarrow, \\ \frac{3m^2 v_0^2}{4M^2} = gl(1 - \cos \alpha). \quad (29.7)$$

Окончательно из уравнения (7) имеем

$$\cos \alpha = 1 - \frac{3m^2 v_0^2}{4M^2 gl}. \quad (29.8)$$

Проверим размерность уравнения (29.8).

$$\left[\frac{1}{1} \right] = \frac{\kappa \varepsilon^2 \cdot \frac{M^2}{c^2}}{\kappa \varepsilon^2 \cdot \frac{M}{c^2} \cdot M} = \frac{1}{1}.$$

Подставив в уравнение (29.8) данные из условия задачи, получим

$$\cos \alpha = 1 - \frac{3 \cdot (10 \cdot 10^{-3} \kappa \varepsilon)^2 \left(500 \frac{M}{c} \right)^2}{4 \cdot (10 \kappa \varepsilon)^2 \cdot 10 \frac{M}{c^2} \cdot 1,5 M} = 0,987, \Rightarrow, \\ \alpha = \arccos 0,987 \approx 9^\circ.$$

Ответ: $\alpha \approx 9^\circ$.

Задача 30. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается вокруг вертикальной оси. Частота вращения скамьи с человеком в начальный момент равна $n_1 = 0,5 \text{ с}^{-1}$. Момент инерции I_0 тела человека относительно оси вращения равен $1,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. В вытянутых в стороны руках человек держит по маленькой гире массой $m = 2 \text{ кг}$ каждая. Расстояние между гириями $l_1 = 1,6 \text{ м}$. Определите частоту вращения n_2 скамьи с человеком, когда он опустит руки и расстояние l_2 между гириями станет равным $0,4 \text{ м}$. Силами трения в оси скамьи и сопротивлением воздуха пренебречь. Момент инерции скамьи относительно оси вращения равен $I = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Гири рассматривать как материальные точки.

Ответ: $n_2 = 0,8 \text{ с}^{-1}$

Дано:

$$n_1 = 0,5 \text{ с}^{-1}$$

$$I_0 = 1,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_0 = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$l_1 = 1,6 \text{ м}$$

$$l_2 = 0,4 \text{ м}$$

$$F_{\text{тр}} = 0 \text{ Н}$$

$$n_2 - ?$$

Анализ задачи

Решить эту задачу, используя уравнения кинематики или динамики, нельзя, так как неизвестно время, в течение которого человек опускал руки.

Поэтому применим для решения задачи соответствующие законы сохранения или изменения. Рассмотрим механическую систему «платформа + человек + гири».

Так как система вращается вокруг вертикальной оси (а не движется поступательно), то для решения задачи можно

применить лишь законы изменения или сохранения момента импульса. Используем для этого соответствующую схему решения задач.

Схема решения задач на законы изменения или сохранения момента импульса

1. Сделайте два рисунка, на которых изобразите ситуацию, рассматриваемую в задаче непосредственно перед взаимодействием и сразу после взаимодействия. Здесь же укажите направления векторов линейных и угловых скоростей или моментов импульсов всех тел системы.
2. Проанализируйте моменты всех внешних сил, действующих на тела системы в течение всего времени взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени моменты всех внешних сил относительно оси вращения Z не скомпенсированы, то запишите закон изменения момента импульса относительно этой оси Z в виде

$$\left(\sum M_{iz}^{\text{внешних}}\right)t = L_{2z} - L_{1z},$$

где $\sum M_{iz}^{\text{внешних}}$ - сумма моментов всех внешних сил, действующих на тела системы, относительно оси вращения Z ;

t - время действия внешних сил;

$L_{1z} = \left(\sum L_{iz}\right)_{\text{перед}}$ - момент импульса системы непосредственно перед взаимодействием;

$L_{2z} = \left(\sum L_{iz}\right)_{\text{после}}$ - момент импульса системы сразу после взаимодействия.

Если за рассматриваемый промежуток времени моменты всех внешних сил относительно оси вращения Z скомпенсированы или взаимодействие происходит очень кратковременно (удар, разрыв снаряда, выстрел), то запишите закон сохранения момента импульса относительно выбранной оси для рассматриваемой системы в виде

$$\left(\sum L_{iz}\right)_{\text{перед}} = \left(\sum L_{iz}\right)_{\text{после}}.$$

Если за рассматриваемый промежуток времени проекции моментов всех внешних сил, действующих на систему, на какую - либо ось Z в пространстве равны нулю, то запишите закон сохранения проекции момента импульса на направление этой оси:

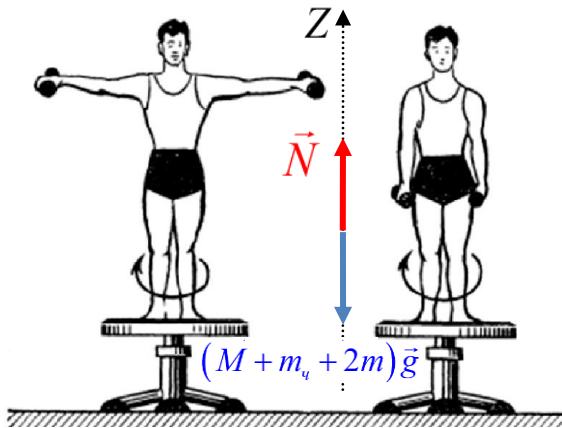
$$\left(\sum L_{iz}\right)_{\text{перед}} = \left(\sum L_{iz}\right)_{\text{после}},$$

где $\left(\sum L_{iz}\right)_{\text{перед}}$ - сумма проекций моментов импульсов тел системы на ось Z непосредственно перед взаимодействием;

$\left(\sum L_{iz}\right)_{\text{после}}$ - сумма проекций моментов импульсов тел системы на ось Z сразу после взаимодействия.

При этом помните, что моменты всех сил и моменты импульсов всех тел системы должны быть записаны относительно одной и той же оси вращения Z .

4. Решите полученную систему уравнений. При необходимости её можно дополнить уравнениями динамики или кинематики.

Решение

Рассмотрим все силы, действующие на тела нашей системы.

Сила реакции опоры $\vec{N}_1$, действующая на человека со стороны скамьи, и вес человека $\vec{P}$, действующий на скамью, являются внутренними силами, которые изменить момент импульса системы не могут, поэтому мы их рассматривать не будем.

Силы трения и сопротивления воздуха по условию задачи отсутствуют.

Силами Архимеда и силами гравитационного взаимодействия тел системы между собой и с окружающими предметами ввиду их малости пренебрегаем.

Электрическое, магнитное и электромагнитное поля Земли на тела системы действовать не будут, так как они, по условию задачи, не заряжены, не намагничены и по ним не протекает электрический ток.

На нашу систему действуют следующие внешние силы: силы тяжести, действующие на скамью $M\vec{g}$, человека $m_c\vec{g}$, и две гири $2m\vec{g}$, а также сила реакции опоры $\vec{N}$, действующая на скамью со стороны поверхности.

Так как все действующие на систему внешние силы направлены вдоль вертикальной оси вращения Z , то их моменты сил относительно этой оси равны нулю.

Поэтому для нашей рассматриваемой механической системы, будет выполняться **закон сохранения момента импульса**. Запишем этот закон относительно вертикальной оси вращения Z для начального и конечного моментов времени:

$$(I_0 + I_{01} + I_{02} + I)\omega_1 = (I_0 + I_1 + I_2 + I)\omega_2,$$

где I_0 - момент инерции тела человека относительно оси вращения (он в условиях нашей задачи не изменяется);

I_{01} и I_1 - начальный и конечный момент инерции первой гири относительно оси вращения;

I_{02} и I_2 - начальный и конечный момент инерции второй гири относительно оси вращения;

I - момент инерции скамьи относительно оси вращения (он в условиях нашей задачи так же не изменяется).

Так как гири маленькие, то их момент инерции можно определить по формуле для момента инерции материальной точки: $I = mr^2$, где r - расстояние гири от оси вращения.

Для нашего случая можно записать, что

$$I_{01} = I_{02} = m \left(\frac{l_1}{2} \right)^2 \text{ и } I_1 = I_2 = m \left(\frac{l_2}{2} \right)^2,$$

где m - масса каждой из гирь; l_1 и l_2 - начальное и конечное расстояние между гирями.

Таким образом,

$$\left(I_0 + 2m \left(\frac{l_1}{2} \right)^2 + I \right) 2\pi n_1 = \left(I_0 + 2m \left(\frac{l_2}{2} \right)^2 + I \right) 2\pi n_2.$$

Отсюда получим

$$n_2 = n_1 \frac{I_0 + 2m \left(\frac{l_1}{2} \right)^2 + I}{I_0 + 2m \left(\frac{l_2}{2} \right)^2 + I}. \quad (30.1)$$

Проверим размерность уравнения (30.1).

$$[n_2] = \frac{\text{об}}{с} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 + \text{кг} \cdot \text{м}^2 + \text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2 + \text{кг} \cdot \text{м}^2 + \text{кг} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{об}}{с} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{об}}{с}.$$

Размерность уравнения (30.1) совпала, поэтому, подставив исходные данные, получим

$$n_2 = \frac{\left(1,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 + 2 \cdot 2 \text{ кг} \cdot \left(\frac{1,6 \text{ м}}{2} \right)^2 + 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \right) 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 \text{ с}^{-1}}{2 \cdot 3,14 \cdot \left(1,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 + 2 \cdot 2 \text{ кг} \cdot \left(\frac{0,4 \text{ м}}{2} \right)^2 + 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \right)} = 0,8 \text{ с}^{-1}$$

Ответ: $n_2 = 0,8 \text{ с}^{-1}$.

7. Действия над векторами

В физике приходится иметь дело со скалярными и векторными величинами. Так как математические правила действий над ними различные, то необходимо понимать разницу между ними и уметь правильно с ними работать.

В отличие от скалярных величин (температура, высота, масса, координата и т.д.) векторные величины (скорость, ускорение, сила, импульс и т.д.) характеризуются тремя параметрами: модулем (или величиной), направлением и положением в пространстве.

Векторные величины, как и скалярные, можно складывать, вычитать и умножать, но по другим правилам, которые мы сейчас рассмотрим.

Сложение векторов

Складывать вектора можно двумя способами: методом треугольника и методом параллелограмма.

Чтобы сложить вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и получить вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ методом треугольника, необходимо выполнить следующие действия:

- 1) параллельным переносом соединяем начало второго вектора $\vec{b}$ с концом первого вектора $\vec{a}$;
- 2) проводим вектор из начала первого вектора $\vec{a}$ в конец второго $\vec{b}$. Это и будет результирующий вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$;

Чтобы сложить вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ методом параллелограмма необходимо выполнить следующие действия:

- 1) параллельным переносом соединяем начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 2) достраиваем параллелограмм на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и проводим диагональ параллелограмма из начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в противоположный угол. Это и будет результирующий вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (см. рис.7.1).

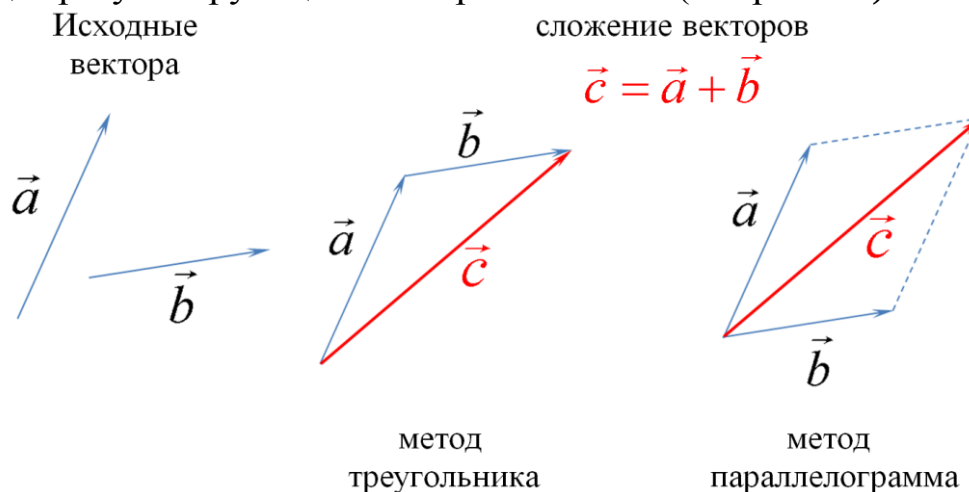


Рис.7.1

Вычитание векторов

Вычитают вектора обычно методом параллелограмма.

- Чтобы вычесть вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и получить вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ методом параллелограмма, необходимо выполнить следующие действия:

- 1) параллельным переносом соединяем начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 2) проводим вектор из конца вычитаемого вектора $\vec{b}$ в конец уменьшаемого вектора $\vec{a}$. Это и будет результирующий вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ (см. рис.7.2).

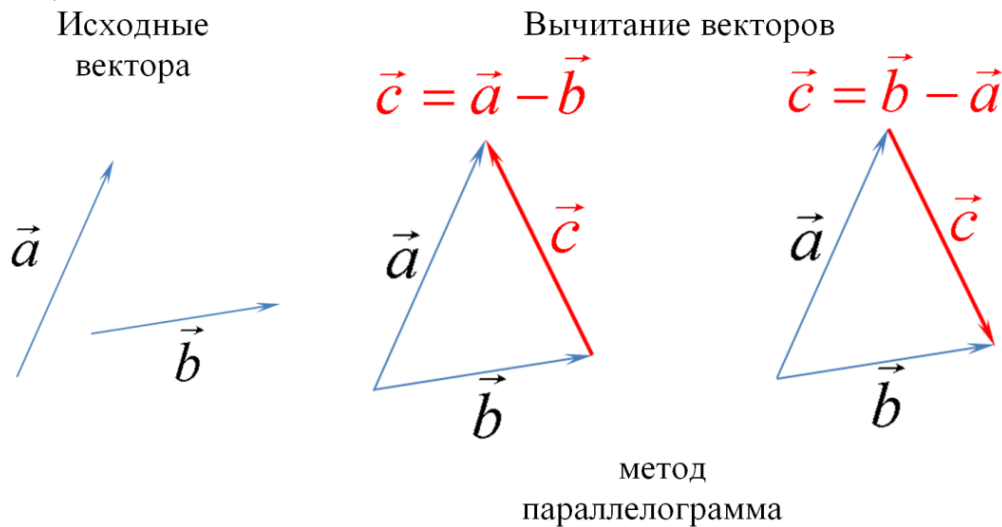


Рис.7.2

Умножение вектора на число

Чтобы умножить вектор $\vec{a}$ на число k и получить вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, необходимо выполнить следующие действия:

- 1) если число k положительное, то результирующий вектор оказывается сонаправленным с вектором $\vec{a}$, а его длина равна $k\vec{a}$;
- 2) если число k отрицательное, то результирующий вектор оказывается противоположно направленным с вектором $\vec{a}$, а его длина равна $k\vec{a}$ (см. рис.7.3).

Умножение вектора на число

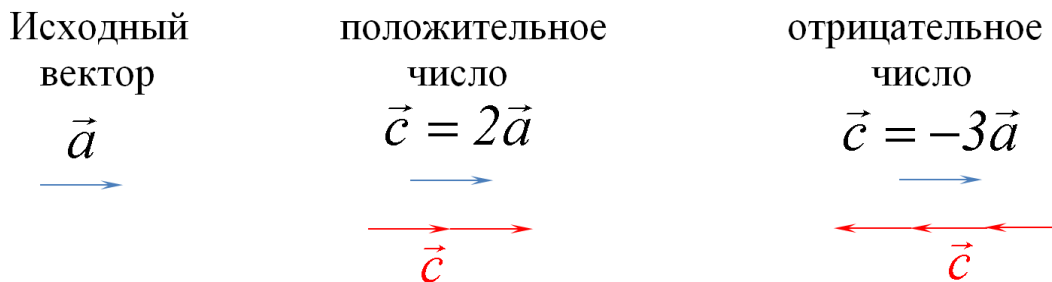


Рис.7.3

Проекция вектора на ось координат

По определению, **проекцией вектора $\vec{a}$** называется скалярная величина равная

$$a = |\vec{a}| \cos \varphi,$$

где $|\vec{a}|$ - модуль вектора $\vec{a}$;

φ - угол между положительным направлением оси и вектором $\vec{a}$.

Графически, проекция вектора $\vec{a}$ на ось координат равна расстоянию между проекциями начала и конца вектора $\vec{a}$.

Чтобы найти проекции начала и конца вектора $\vec{a}$ надо опустить из них перпендикуляры на данную ось (см. рис.7.4).

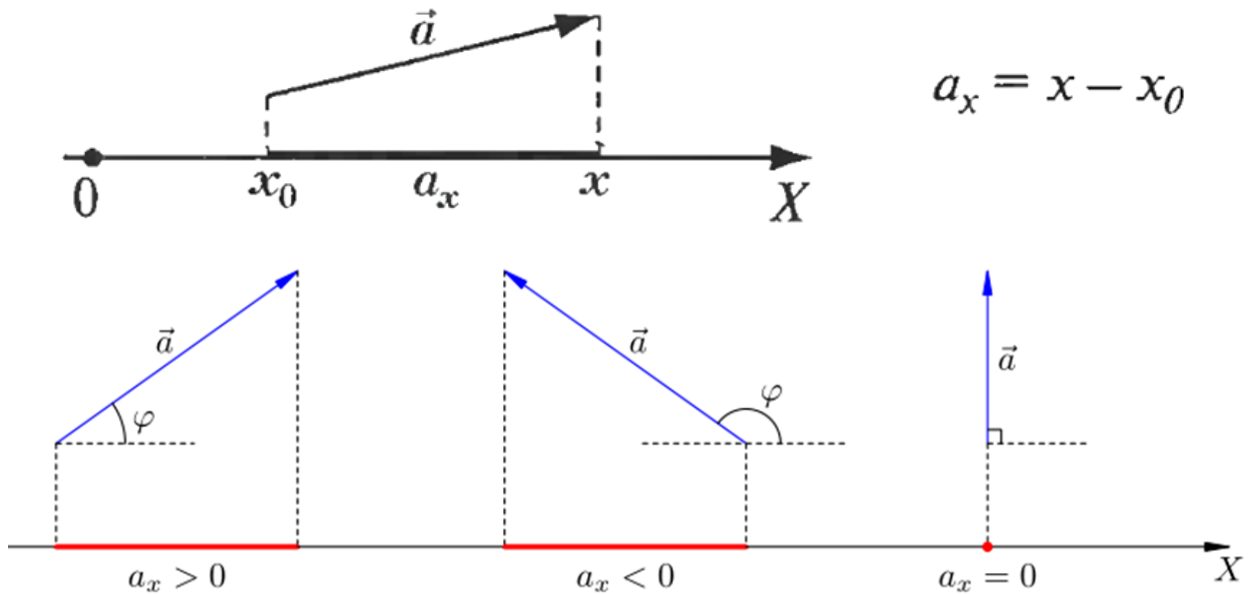
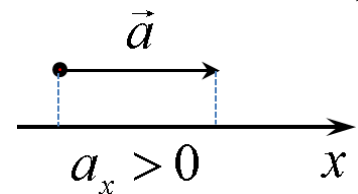


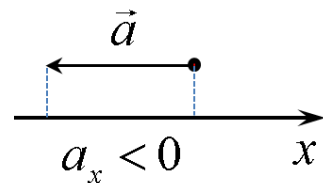
Рис.7.4

Проекция любого вектора может быть положительной, отрицательной или равной нулю.

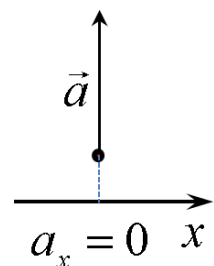
Если вектор сонаправлен с положительным направлением оси, то его проекция на эту ось положительна.



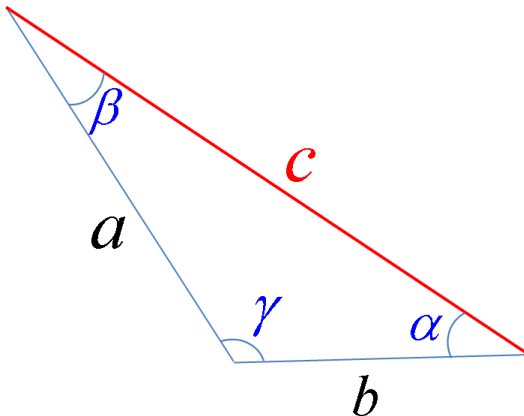
Если вектор противоположно направлен положительному направлению оси, то его проекция на эту ось отрицательна.



Если вектор расположен перпендикулярно оси, то проекция вектора на эту ось равна нулю.



Произвольный треугольник



Теорема косинусов

Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

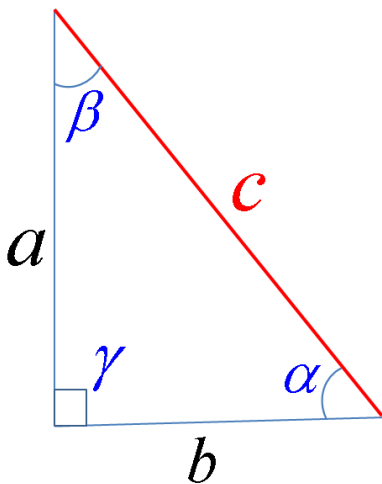
Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Прямоугольный треугольник

Теорема Пифагора

Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов двух его сторон $c^2 = a^2 + b^2$



Катет прямоугольного треугольника равен гипотенузе, умноженной на косинус касающегося этой стороны угла или на синус противолежащего угла.

$a = c \cos \beta = c \sin \alpha$ или $b = c \cos \alpha = c \sin \beta$
(обращаем внимание, что в этой формулировке слова *косинус* и *касающийся* начинаются с одной и той же буквы *к*).

Катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на котангенс касающегося этой стороны угла или на тангенс противолежащего угла.

$$b = a \operatorname{ctg} \alpha = a \operatorname{tg} \beta \quad \text{или} \quad a = b \operatorname{ctg} \beta = b \operatorname{tg} \alpha$$

(обращаем внимание, что в этой формулировке слова *котангенс* и *касающийся* начинаются с одной и той же буквы *к*).

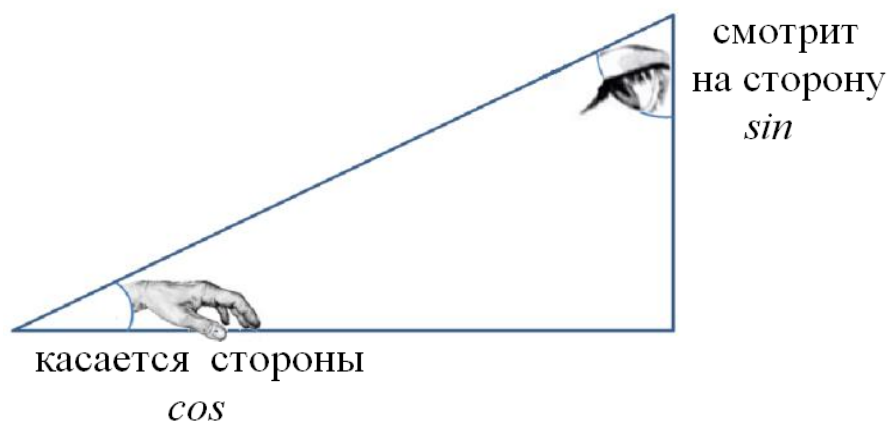


Таблица синусов и косинусов

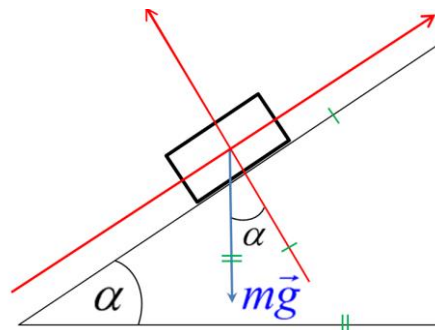
α	0	30	45	60	90	180
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	

Обращаем внимание на последнюю строчку таблицы. Закономерность предложенного ряда очевидна и легко запоминается.

Если при этом помнить, что **cos** является дополнением к **sin** до 90° , то есть $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$, $\cos 90^\circ = \sin 0^\circ$ и т. д., то запомнить остаётся лишь значения **sin** основных углов.

Теорема о взаимно перпендикулярных сторонах двух треугольников

Углы между двумя взаимно перпендикулярными сторонами двух треугольников равны.



Действия над степенями

$$10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}; \quad \frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}; \quad (10^a)^b = 10^{a \cdot b}$$